现代数学丛书

齐性空间微分几何学

谷 超 豪 著

上海科学技术出版社

现代数学丛书

齐性空间微分几何学

谷 超 豪 著

上海科学技术出版社

內容提要

本书是現代数学丛书中的一种，系統地反映了作者和复旦大学微分几何組近年来在齐性空間研究中所取得的成果，有些結果尙属初次发表．全书是从局部的观点来写作的，內容包括七章和一个附录．第一章介紹張量代数和綫性群的基本概念，第二章介紹本书所用的分析工具——外微分形式，第三章用外形式法介紹局部李群的基本定理，第四章闡述李代数的某些性质以及綫性群和綫性李代数的关系，第五章闡述齐性空間的一般性质，第六章是本书的中心，从迷向群和齐性空間的关系来研究齐性空間的构造，第七章討論对称空間的基本性质．在附录中，介紹了用整体观点来看本书內容的若干注意，并补充了一些說明．供高等学校数学系高年級学生、研究生及这方面的数学工作者参考．

現代数学丛书

齐性空間微分几何学

谷超豪 著

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号

上海市印刷四厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本850×1156 1/32　印張10　排版字数227,000
1965年3月第1版　1965年3月第1次印刷
印数1—4,500（其中精装本300册）

統一书号 13119·630　定价(科六) 1.50元

序

本书是以复旦大学微分几何专門組的教材和研究生的学习資料为基础，加以适当的修改和增补而成. 全书是从局部的观点来写作的，又尽可能地介紹了一些必需的预备材料，使得讀者在掌握了大学的基础課程并对張量分析和黎曼几何学有初步的了解之后，就可以閱讀本书.

齐性空間微分几何学的內容現在已相当充实，除 E. Cartan 的工作外，也出現了不少的专著. 本书不准备全面地叙述这一方面的最近成果，我們的目的在于：一、介紹若干基本工具和方法；二、着重討論迷向群和齐性空間(特别是齐性黎曼空間)之間的关系，因为弄清楚这一关系就能对齐性空間(特别是齐性黎曼空間)提供一个重要的研究途徑. 本书的一部分内容是复旦大学微分几何組近年来科学研究的成果，有些結果尙未发表过.

全书分七章和一个附录. 第一章介紹張量代数，引出張量在綫性变換下不变的概念，导出各种典型群. 在这一章中对于实綫性群的实不可約性和复不可約性之間的关系也予以一定的注意. 第二章介紹本书的分析工具——外微分形式，这里所涉

及的只是一些最基本的內容,除基本运算外,我們着重于完全可积的法甫方程組和特征系統的理論.第三章用外形式法介紹局部李群的基本定理,敘述子群的构成,变换群微分算子的构造等.第四章除給出綫性群和綫性李代数的关系外,还对李代数的某些基本事項作了介紹,对于旋轉群的李代数的某些性质,特别是交换矩陣的決定作了較完备的敘述.第五章中介紹齐性空間的活动标形法,初步地提出了迷向群和空間本身性质的一些关系,幷簡单地介紹了几何对象場运动群的理論.这一章的若干內容是在 E. Cartan 的无限連續变换群理論的影响下写成的,虽然它本身幷不牽涉到无限連續变换群.这些內容对第六章也产生一定的作用.第六章是本书中篇幅最多的部分,除了簡略地介紹齐性黎曼空間(正定)的一般性质之外,重点在于研究齐性黎曼空間的构造,我們特别注意迷向群具不变向量場的情形,由于发現了群的某些結构常数的几何意义而使得对这类空間的決定在一定的意义下趋向完备.在这一章中幷对黎曼空間的运动群的参数的"空隙性"問題作了分析.由 Fubini 开始发現,后来由王宪鍾,Егоров 等人所继續研究的"空隙性"現象已有了較完善的解釋.当空間維数 n 大时,我們指出制作逐次空隙的途徑,幷指出各种运动群参数較大时的具体綫素.在这一章中我們还討論了不可迁运动群,相似变换群,仿射变换群,共形变换群.这些論述表明,上述变换群的研究最終都可归結于对齐性黎曼空間的研究.第七章中介紹对称黎曼空間的基本性质,幷指出它在迷向群为不可約的齐性黎曼空間中的地位.在附录中,我們介紹了用整体的观点来看本书的对象时的若干注意点,对各个术語的意义作了补充的說明.

由于作者水平所限,最近几年来对数学这一分支的注意也很少,本书的缺陷一定很多,請各方面的同志們多加指正.

本书的初稿是作者在1959年至1960年写成的，当时曾将內容讲授过一次．胡和生同志后来又对初稿作了相当的增补，并讲授过二次．在这一年来，对內容又重新作了全面的整理，研究生沈純理同志也帮助做了不少的整理工作，此外，研究生張爱和同志，萧尔健同志，应紹箕同志和五年級微分几何专門組的同学也都帮了很多的忙，特向上述的同志們致謝．

最后，还要特别感謝苏步青教授对本书的写作所給予的热情支持和督促．

谷 超 豪

复旦大学

目　　录

第一章　張量. 綫性群

§1·1　張　　量

我們經常要用到复数域和实数域上有限維的綫性空間，在本章中将叙述若干有关綫性空間的預备知識，介紹綫性空間中的張量运算．我們的論述从复数域上綫性空間的張量运算开始．

設 P_n 是一个 n 維的复向量空間，用 x, y 表其中的元素．在引入一般張量之前，我們先討論 P_n 上的綫性函数．如所知，P_n 上的綫性函数是定义在 P_n 上的复値函数 $f(x)$，它滿足

$$f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y), \qquad (1\cdot1\cdot1)$$

这里 x, y 为 P_n 中的任意两个元素，λ, μ 为任意两个复数．

設在 P_n 中已选好一組基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$; P_n 中的任一元素 x 可写成

$$x=\sum_{i=1}^{n} x^i e_i=x^i e_i$$

(在本书中我們对和式将采取省略的記法，即对上下指标重复的和式，一概略去記号 $\sum$)．式中的 $(x^1, \cdots, x^n)$ 为向量 x 对应于

这一組基的坐标．又若

$$f(e_i)=f_i, \tag{1·1·2}$$

綫性函数 $f(x)$ 可用向量 x 的坐标的齐一次式表示，即

$$f(x)=f(x^ie_i)=x^if(e_i)=f_ix^i. \tag{1·1·3}$$

空間 P_n 的綫性函数的全体也組成一个 n 維的綫性空間，称为 P_n 的共軛空間，記为 P_n^*.

对应于 P_n 的一組已給的基 $\{e_i\}$，在 P_n^* 中也可选出 n 个元素 e^i $(i=1, 2, \cdots, n)$，使

$$e^i(e_j)=\delta^i_j, \tag{1·1·4}$$

这里

$$\delta^i_j=\begin{cases}1 & i=j,\\ 0 & i\neq j.\end{cases}$$

容易見到，e^i 也构成 P_n^* 的一組基，它称为 P_n 的基 $\{e_i\}$ 的对偶基．基 $\{e_i\}$ 也称为 P_n 的一个标形，因此对偶基 $\{e^i\}$ 也称为标形 $\{e_i\}$ 的对偶标形．当空間 P_n 的基 $\{e_i\}$ 改变为 $\{e'_i\}$ 时，如

$$e'_i=a^j_ie_j, \tag{1·1·5}$$

那末对偶基 $\{e^i\}$ 也要变为 $\{e'^i\}$．依据

$$e'^i(e'_j)=e'^i(a^l_je_l)=a^l_je'^i(e_l)=\delta^i_j$$

可知，

$$e'^i=\tilde{a}^i_he^h, \tag{1·1·6}$$

这里 $\tilde{a}^i_j$ 为非异方陣 (a^i_j) 的逆陣的一般元素[1]，而 a^i_j 常表陣 (a^i_j) 中第 i 行第 j 列的元素．

在基变换 (1·1·5) 之下，向量 x 的坐标从 $(x^1, \cdots, x^n)$ 变为 $(x'^1, \cdots, x'^n)$，而且

$$x^i=a^i_jx'^j, \quad x'^i=\tilde{a}^i_jx^j. \tag{1·1·7}$$

参考于对偶标形 $\{e^i\}$，任一 P_n 的綫性函数 f 依 (1·1·2), (1·1·4) 可写作

---

[1] 今后我們对逆陣的元素均以記号～表示．

$$f = f_i e^i, \tag{1·1·8}$$

这里的 f_i 就是 f 参考于标形 $\{e^i\}$ 的坐标. 当标形 $\{e^i\}$ 依 (1·1·6) 改变为 $\{e'^i\}$ 时, 我們也有

$$f'_i = a_i^j f_j, \quad f_i = \tilde{a}_i^j f'_j. \tag{1·1·9}$$

联系于綫性空間 P_n, 除 P_n^* 外, 还有一系列其他的綫性空間. 我們要举出其中相当广泛的一类, 这就是在 P_n 上的各种張量所成的空間, P_n^*, 甚至 P_n 本身都可以視为它的特殊情形. 关于張量的討論, 在微分几何学和群論中都是很基本的.

先定义任意两个綫性空間的"張量积". 設 $\underset{1}{P_n}$ 和 $\underset{2}{P_m}$ 为任意两个复向量空間, 設 $\underset{1}{P_n}$ 中有一組基 $\underset{1}{e_i}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, $\underset{2}{P_m}$ 中有一組基 $\underset{2}{e_\alpha}$ $(\alpha=1, 2, \cdots, m)$, 形式上作元素 $e_{i\alpha}=(\underset{1}{e_i}, \underset{2}{e_\alpha})$, 又作形状为 $\lambda^{i\alpha}e_{i\alpha}$ 的元素的全体, 記为 P_{nm}, 并規定

1. $$\lambda^{i\alpha}e_{i\alpha} + \mu^{i\alpha}e_{i\alpha} = (\lambda^{i\alpha} + \mu^{i\alpha})e_{i\alpha}, \tag{1·1·10}$$

2. $$\lambda(\lambda^{i\alpha}e_{i\alpha}) = (\lambda\lambda^{i\alpha})e_{i\alpha}, \tag{1·1·11}$$

3. $\lambda^{i\alpha}e_{i\alpha} = \mu^{i\alpha}e_{i\alpha}$ 的充要条件是 $\lambda^{i\alpha} = \mu^{i\alpha}$. (1·1·12)

显然可見, P_{nm} 构成一个綫性空間, 維数为 $n\times m$ 且具有基 $e_{i\alpha}$. 这样制作的空間 P_{nm} 称为空間 $\underset{1}{P_n}$ 和 $\underset{2}{P_m}$ 的"張量积". 按定义来看, "張量积"的形式似乎和空間 $\underset{1}{P_n}$, $\underset{2}{P_m}$ 的基的选擇有关, 但是, 如果在 $\underset{1}{P_n}$ 中选基 $\underset{1}{e'_i} = a_i^j \underset{1}{e_j}$, 在 $\underset{2}{P_m}$ 中选基 $\underset{2}{e'_\alpha} = b_\alpha^\beta \underset{2}{e_\beta}$, 形式地作出 $e'_{i\alpha} = (\underset{1}{e'_i}, \underset{2}{e'_\alpha})$, 再規定 $e'_{i\alpha} = a_i^j b_\alpha^\beta e_{j\beta}$, 我們就能把所作出的張量积空間等同于依基 $\underset{1}{e_i}$, $\underset{2}{e_\alpha}$ 所作出的空間, 因而"張量积"的形成就不再依賴于基的选擇了. 同样, 我們也可以作出若干个綫性空間的張量积.

特别, 我們取 a 个 P_n, b 个 P_n^* 作張量积 (a, b 非負整数), 并且各个 P_n 的标形均选为同一的 $\{e_i\}$, 而各个 P_n^* 的标形选为

$\{e_i\}$的对偶标形$\{e^i\}$，那末这張量积空間为$n^{(a+b)}$維的，它的基为$e^{j_1 j_2\cdots j_b}_{i_1 i_2\cdots i_a}$．当标形$\{e_i\}$进行变换(1·1·5)时，基变化的規則为

$$e'^{j_1 j_2\cdots j_b}_{i_1 i_2\cdots i_a}=a^{k_1}_{i_1}a^{k_2}_{i_2}\cdots a^{k_a}_{i_a}\tilde{a}^{j_1}_{l_1}\tilde{a}^{j_2}_{l_2}\cdots\tilde{a}^{j_b}_{l_b}e^{l_1 l_2\cdots l_b}_{k_1 k_2\cdots k_a}. \qquad (1\cdot1\cdot13)$$

这个空間的元素称为a阶反变，b阶共变的張量，它們可表为

$$T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}e^{j_1\cdots j_b}_{i_1\cdots i_a} \qquad (1\cdot1\cdot14)$$

的形状．$n^{(a+b)}$个数$T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}$称为这張量在标形$\{e_i\}$下的支量．在选好标形后，一張量由其支量所完全确定．依据(1·1·13)和(1·1·12)，可以求出当P_n的基e_i作改变时，張量的支量的变换規律．事实上，由于

$$T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}e^{j_1\cdots j_b}_{i_1\cdots i_a}=T'^{k_1\cdots k_a}_{l_1\cdots l_b}e'^{l_1\cdots l_b}_{k_1\cdots k_a}=T'^{k_1\cdots k_a}_{l_1\cdots l_b}a^{i_1}_{k_1}\cdots a^{i_a}_{k_a}\tilde{a}^{l_1}_{j_1}\cdots\tilde{a}^{l_b}_{j_b}e^{j_1\cdots j_b}_{i_1\cdots i_a},$$

就得出

$$T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}=T'^{k_1\cdots k_a}_{l_1\cdots l_b}a^{i_1}_{k_1}\cdots a^{i_a}_{k_a}\tilde{a}^{l_1}_{j_1}\cdots\tilde{a}^{l_b}_{j_b}. \qquad (1\cdot1\cdot15)$$

同样也有

$$T'^{k_1\cdots k_a}_{l_1\cdots l_b}=T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}\tilde{a}^{k_1}_{i_1}\cdots\tilde{a}^{k_a}_{i_a}a^{j_1}_{l_1}\cdots a^{j_b}_{l_b}.$$

对一固定类型的張量来說，它的全体組成复数域上的向量空間，因而它有加法以及同复数的乘法这两种代数运算．此外，由二張量所成的綫性空間可再作它們的張量积，例如a阶反变，b阶共变的張量所成的空間和c阶反变，d阶共变的張量所成的空間的張量积为$a+c$阶反变，$b+d$阶共变的張量空間，它的基可选为

$$e^{j_1\cdots j_b j_{b+1}\cdots j_{b+d}}_{i_1\cdots i_a i_{a+1}\cdots i_{a+c}}.$$

当$b=0$，$a>0$时，我們得到a阶的反变張量；当$a=0$，$b>0$时，我們得到b阶的共变張量，特别当$b=1$时，我們得到P_n^*空間中的元素，也称为共变向量．有时空間P_n中的元素也称为反变向量．它們都是一阶的張量．为方便計，我們有时把复数本身也理解为0阶的張量，并称之为数量．

b阶的共变張量可理解为P_n中的b綫性函数，所謂b綫性

函数就是依賴于 P_n 中 b 个元素的函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_b)$ $(x_1 \in P_n, \cdots, x_b \in P_n)$，它关于每一向量 $x_\alpha (\alpha=1, 2, \cdots, b)$ 均为綫性的.

§1·2 綫性变换. 綫性变换群

如所知，复向量空間 P_n 到自身的一个对应 $\boldsymbol{A}$ 如具有下述性质：

$$\boldsymbol{A}(\lambda x+\mu y)=\lambda \boldsymbol{A} x+\mu \boldsymbol{A} y \quad (x, y \in P_n, \lambda, \mu \text{ 复数}), \tag{1·2·1}$$

則称它为綫性变换. 設 $\{e_i\}$ 为空間 P_n 的一組基，綫性变换 $\boldsymbol{A}$ 可由它作用于基向量 e_i 的象所完全确定. 事实上，設

$$\boldsymbol{A} e_i=\alpha_i^j e_j, \tag{1·2·2}$$

那末

$$\boldsymbol{A} x=\boldsymbol{A} x^i e_i=x^i \boldsymbol{A} e_i=\alpha_i^j x^i e_j. \tag{1·2·3}$$

由这个式子也可以知道，綫性变换可以由

$$\tilde{x}^i=\alpha_j^i x^j \tag{1·2·4}$$

来表示，这里 x^i 和 $\tilde{x}^i$ 分别表示变前和变后的向量的坐标. 如果把 P_n 的向量的坐标写成单列的矩陣，称为坐标向量，把(1·2·2)的系数 α_j^i 写成 $n\times n$ 方陣 (α_j^i)，那末綫性变换的式子(1·2·4)就表明：在綫性变换下，变后向量的坐标向量为以方陣 (α_i^j) 乘变前向量的坐标向量的結果. 在选好标形之后，綫性变换可以利用 $n\times n$ 方陣表示，如果給定了一个 $n\times n$ 方陣，也就可以作出一个綫性变换，二者之間的对应是一对一的.

应該注意到，綫性变换和矩陣的对应是依賴于基的选取的，如果基有所改变，即取基 $e_i'=a_i^j e_j$ 时，

$$\boldsymbol{A} e_i'=a_i^j \boldsymbol{A} e_j=a_i^j \alpha_j^k e_k=a_i^j \alpha_j^k \tilde{a}_k^l e_l', \tag{1·2·5}$$

所以表示变换的 $n\times n$ 方陣即为与 (α_i^j) 相似的

$$(\alpha_j'^i)=(\tilde{a}_k^i)(\alpha_j^i)(a_j^h). \tag{1·2·6}$$

綫性变换 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的和与积是依下述公式定义的:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})x=\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{B}x, \tag{1·2·7}$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})x=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}x). \tag{1·2·8}$$

也可以依

$$(\lambda\boldsymbol{A})x=\lambda\boldsymbol{A}x \quad (\lambda\text{ 复数}) \tag{1·2·9}$$

定义复数和綫性变换的乘积. 在选好一个标形后, 这些运算对应于相应的方陣間的加法, 乘法以及复数和方陣相乘等运算, 卽若 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 对应方陣 (α^i_j), (β^i_j), 則 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 对应方陣 $(\alpha^i_j)+(\beta^i_j)=(\alpha^i_j+\beta^i_j)$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 对应方陣 $(\alpha^i_j)(\beta^i_j)=(\alpha^i_j\beta^j_k)$, $\lambda\boldsymbol{A}$ 对应方陣 $\lambda(\alpha^i_j)=(\lambda\alpha^i_j)$.

一对一的綫性变换称为非异的, 它們对应非异的方陣. 两个非异的綫性变换的乘积仍然是非异的綫性变换, 非异的綫性变换的逆变换也存在, 且为非异的. 因而非异的綫性变换的全体构成一群, 称为空間 P_n 的完全綫性群, 記为 $GL(n, C)$. 完全綫性群的任何子群就称为綫性变换群或簡称綫性群.

当 P_n 中作用一非异的綫性变换 $\boldsymbol{A}$ 时, 我們要求在 P^*_n 中的一个相应的綫性变换 $\boldsymbol{A}^*$, 使得綫性函数 $f(x)$ 的值保持不变, 也就是說, 能使 $(\boldsymbol{A}^*f)(\boldsymbol{A}x)=f(x)$. 为此只須考虑 $x=e_i$, $f=e^j$, 我們有

$$(\boldsymbol{A}^*e^j)(\alpha^k_i e_k)=e^j(e_i)=\delta^j_i,$$

或者

$$\alpha^k_i(\boldsymbol{A}^*e^j)(e_k)=\delta^j_i.$$

把 (α^k_i) 的逆方陣記为 $(\tilde{\alpha}^k_i)$, 那末就有

$$(\boldsymbol{A}^*e^j)(e_k)=\tilde{\alpha}^j_k=\tilde{\alpha}^j_i e^i(e_k).$$

因此得到

$$\boldsymbol{A}^*e^j=\tilde{\alpha}^j_i e^i. \tag{1·2·10}$$

这样的綫性变换称为 P_n 中的綫性变换 $\boldsymbol{A}$ 在 P^*_n 中誘导出来的

綫性变換．如記 $f=f_i e^i$，那末 $\boldsymbol{A}^* f=f_i\tilde{\alpha}^i_j e^j$，所以 f 的变后元素的坐标

$$\tilde{f}_i=\tilde{\alpha}^j_i f_j, \tag{1·2·11}$$

依据(1·2·11)和(1·2·4)，我們就有

$$\tilde{f}_i\tilde{x}^i=\tilde{\alpha}^j_i f_j\alpha^i_k x^k=f_i x^i. \tag{1·2·12}$$

这說明，当綫性变換和其誘导的变換同时作用时，P_n 上的綫性形式就不起变化．事实上，这也就是引入誘导的变換的出发点．

同一思想可用之于任意的張量空間．当 P_n 中作用綫性变換 $\boldsymbol{A}$ 时，在 a 阶反变，b 阶共变的張量空間中也誘导出一个綫性变換，記为 $\boldsymbol{A}_{(a,b)}$，它是依下式定义的：

$$\boldsymbol{A}_{(a,b)}e^{j_1\cdots j_b}_{i_1\cdots i_a}=\alpha^{k_1}_{i_1}\cdots\alpha^{k_a}_{i_a}\tilde{\alpha}^{j_1}_{l_1}\cdots\tilde{\alpha}^{j_b}_{l_b}e^{l_1\cdots l_b}_{k_1\cdots k_a}. \tag{1·2·13}$$

对于張量的支量来說，就有

$$\tilde{T}^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}=\alpha^{i_1}_{k_1}\cdots\alpha^{i_a}_{k_a}\tilde{\alpha}^{l_1}_{j_1}\cdots\tilde{\alpha}^{l_b}_{j_b}T^{k_1\cdots k_a}_{l_1\cdots l_b}. \tag{1·2·14}$$

这样的变換，在 n^{a+b} 維空間（$a+b>1$）来看，是完全綫性群 $GL(n^{a+b}, C)$ 的一个子群，但它和 $GL(n, C)$ 同构．

如果 G 是任意一个綫性群，$T=T^{i_1\cdots i_a}_{k_1\cdots k_b}e^{k_1\cdots k_b}_{i_1\cdots i_a}$ 为任一張量，若对群 G 中的任一元素 g，所誘导出的綫性变換 $\boldsymbol{A}_{(a,b)}$ 常能滿足

$$\boldsymbol{A}_{(a,b)}T=T, \tag{1·2·15}$$

这就是，依(1·2·14)所定义的 $\tilde{T}^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}$ 常滿足

$$\tilde{T}^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}=T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}, \tag{1·2·16}$$

那末就称張量 T 在群 G 下为不变．

§1·3　典型群及其几何学

变換群和几何学有密切的关系，古典的几何空間往往都联系于一定的变換群，而空間的几何性质，就是群的不变性质，这便是 F. Klein 所提出的观点(見 F. Klein[1])．

如果用这样的观点来看綫性空間，那末它所联系的变換群

便是完全綫性群．在完全綫性群下不变的基本性质是向量之間的綫性相关关系，的确，这种关系是綫性空間的一項根本性质．

許多重要的空間联系于完全綫性群的子群．我們在这里要介紹复欧氏空間和复辛空間，它們所对应的子群是使某些二阶共变張量或双綫性形式不变的群．

双綫性形式 $f(x, y)$ 如满足

$$f(x, y)=f(y, x) \quad (x\in P_n,\ y\in P_n), \tag{1·3·1}$$

就称它为对称的；又如果 $f(x, y)$ 满足

$$f(x, y)=-f(y, x), \tag{1·3·2}$$

則称它为反称的；又如果不存在 x $(x\neq 0)$ 使

$$f(x, y)=0$$

对任何 y 成立，那末 $f(x, y)$ 称为满秩的．在选好标形 $\{e_i\}$ 之后，双綫性形式 $f(x, y)$ 可写成

$$f(x, y)=g_{ij}x^iy^j \quad (g_{ij}\ \text{复数}), \tag{1·3·3}$$

那末，$f(x, y)$ 为对称的充要条件是

$$g_{ij}=g_{ji}; \tag{1·3·4}$$

$f(x, y)$ 为反称的充要条件为

$$g_{ij}=-g_{ji}; \tag{1·3·5}$$

又 $f(x, y)$ 满秩的充要条件为

$$\det|g_{ij}|\neq 0. \tag{1·3·6}$$

現在我們討論复欧氏向量空間．一个复 n 維向量空間，如再带有一个满秩的对称的双綫性形式 $f(x, y)$，用来定义空間中每两向量 x, y 的数量积，那末这空間就称为复欧氏向量空間．在这样的空間里，我們称 $f(x, x)$ 为向量 x 的“长度”的平方（它可能不是非負实数），长度平方为 1 的向量称为单位向量．又两个向量 x, y 如满足

$$f(x, y)=0,$$

则称它們为直交的. 如有两子空間 K, L, 又 K 中任一向量和 L 中任一向量直交, 則称子空間 K, L 为直交的. 又空間中的一标形, 如果它的基为单位向量, 又相互直交, 那末就称这标形为直交規范的. 在不致发生誤会的情况下, 也往往就簡称为直交标形.

現証明

定理 1 复欧氏向量空間中必存在直交規范标形.

首先可見, 必存在向量 e, 使 $f(e, e)=c_1\neq 0$. 事实上, 如 $f(x, x)=0$ 对所有 x 成立, 那末对任何一对向量 x, y, 成立

$$f(\lambda x+\mu y, \lambda x+\mu y)=\lambda^2 f(x, x)+2\lambda\mu f(x, y)+\mu^2 f(y, y)$$
$$=2\lambda\mu f(x, y)=0,$$

这和 $f(x, y)$ 为满秩这一个假定矛盾. 选

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{c_1}}e,$$

那末就有 $f(e_1, e_1)=1$. 現假設已选好 $e_1, e_2, \cdots, e_m$ $(m<n)$, 使

$$f(e_\alpha, e_\beta)=\delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta=1, 2, \cdots, m), \qquad (1\cdot 3\cdot 7)$$

而要証明

$$f(e_\alpha, x)=0 \qquad (1\cdot 3\cdot 8)$$

必有解, 它能满足 $f(x,x)\neq 0$. 为此, 先注意到任意向量 y 必可书为 $y=\underset{1}{y}+\underset{2}{y}$, 于此 $\underset{1}{y}$ 为 e_α 的綫性組合, 而 $\underset{2}{y}$ 满足 (1·3·8) 式. 事实上, 令 $c^\alpha=f(e_\alpha, y)$, 令 $\underset{1}{y}=c^\beta e_\beta$, $\underset{2}{y}=y-c^\beta e_\beta$, 那末

$$f(e_\alpha, \underset{2}{y})=f(e_\alpha, y-c^\beta e_\beta)=f(e_\alpha, y)-c^\beta f(e_\alpha, e_\beta)=0.$$

現应用反証法. 如果所有满足 (1·3·8) 的向量均成立 $f(x, x)=0$, 那末当 x, y 满足 (1·3·8) 式时, $\lambda x+\mu y$ 也满足 (1·3·8) 式, 所以有

$$f(\lambda x+\mu y,\ \lambda x+\mu y)=0.$$

由此推出$f(x,\ y)=0$. 因而取x为滿足(1·3·8)式的任一非零元素((1·3·8)式事实上是n个未知数的綫性齐次方程組，方程个数为m，因$m<n$，所以非零解存在)，又y为任一向量，把y写成$\underset{1}{y}+\underset{2}{y}$的形状，那末依剛才所說的事实就立即推出$f(x,\ y)=0$，这与双綫性形式$f(x,\ y)$为滿秩这一假設矛盾．根据所証事实，我們就能选取一元素e，使滿足(1·3·8)式，又$f(e,\ e)=c_m\neq 0$，取

$$e_{m+1}=\frac{1}{\sqrt{c_m}}e,$$

我們就有$e_1,\ \cdots,\ e_{m+1}$，使

$$f(e_\alpha,\ e_\beta)=\delta_{\alpha\beta}\quad(\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \cdots,\ m+1).$$

依此步驟一直进行下去，我們就会得到一組向量

$$e_i\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

使

$$f(e_i,\ e_j)=\delta_{ij},\tag{1·3·9}$$

换言之，它們是相互直交的单位向量．最后要証，它們是綫性无关的．这因为，如有关系$\lambda^i e_i=0$，那末

$$f(e_j,\ \lambda^i e_i)=0$$

就給出$\lambda^j=0\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$．这样，就完成了定理1的証明．

在直交規范标形下，双綫性形式$f(x,\ y)$具形状

$$f(x,\ y)=f(e_i,\ e_j)x^iy^j=\delta_{ij}x^iy^j=\sum_{i=1}^{n}x^iy^i,\tag{1·3·10}$$

而向量的长度的平方是$\sum(x^i)^2$.

因为复欧氏向量空間的最基本的性质是两向量的数量积，因此它所联系的群应为使双綫性形式$f(x,\ y)$不变的非异綫性变换的全体所构成．設$\boldsymbol{A}$为这样的綫性变换，那末就有

$$f(Ax,\ Ay)=f(x,\ y),\tag{1·3·11}$$

写成坐标形式得

$$g_{ij}a_k^i a_l^j=g_{kl}.\tag{1·3·12}$$

(1·3·12) 就是 A 使复欧氏向量空間的数量积不变的充要条件. 特别,当标形选为直交規范时, g_{ij} 化为 δ_{ij}, 而(1·3·12)式化为

$$\sum a_k^i a_l^i=\delta_{kl}.\tag{1·3·13}$$

这就是說, A 所对应的方陣是复直交陣, 即 (a_j^i) 的轉置为其本身的逆陣. 这样的 A 所成的群称为复直交群 $O(n,\ C)$. 显然可見, 一綫性变換属于复直交群的充要条件是它能使直交規范标形化为直交規范标形.

我們再討論一种空間,这便是复辛向量空間. 这种空間也是以双綫性形式 $f(x,\ y)$ 来定义向量的数量积的空間,但这时的 $f(x,\ y)$ 却是反称,滿秩的.

在复辛向量空間的情况下,由 $f(x,\ y)=g_{ij}x^iy^j$ 的系数 g_{ij} 所成的矩陣为反称的, 因而只可能在 n 为偶数($n=2k$, k 正整数)时 $f(x,\ y)$ 才为滿秩.

和复欧氏向量空間不同,在复辛向量空間中,每一向量和它自身的数量积 $f(x,\ x)$ 恒等于0, 因此沒有向量的长度的概念, 但照样可以由关系式 $f(x,\ y)=0$ 来定义向量 x 和 y 的直交性, 这时向量 x, y 称为辛直交.

在复辛向量空間中,如果能取到一組基 $e_1,\ \cdots,\ e_n$, 使滿足

$$f(e_\alpha,\ e_{k+\beta})=\delta_{\alpha\beta},\quad f(e_\alpha,\ e_\beta)=0,\quad f(e_{k+\alpha},\ e_{k+\beta})=0$$
$$(\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \cdots,\ k),\tag{1·3·14}$$

就称它們所組成的标形为辛标形. 現証明

定理 2 在复辛向量空間中,辛标形必存在.

首先注意到, 任取一个非零向量 e_1, 就会存在向量 e_{k+1}, 使

$$f(e_1,\ e_{k+1})=1.\tag{1·3·15}$$

事实上，由于 $f(x, y)$ 为满秩的，所以 $f(e_1, y)$ 不会对所有的 y 均为 0，适当改变 y 的倍数，取为 e_{k+1}，就得出(1·3·15)式.

現設已求到 $e_1, e_2, \cdots, e_s$; $e_{k+1}, e_{k+2}, \cdots, e_{k+s}$ $(s<k)$，并已有

$$f(e_a, e_{k+b})=\delta_{ab}, \quad f(e_a, e_b)=0, \quad f(e_{k+a}, e_{k+b})=0$$
$$(a, b=1, 2, \cdots, s). \tag{1·3·16}$$

方程

$$f(e_a, y)=0, \quad f(e_{k+a}, y)=0 \tag{1·3·17}$$

按坐标来說为 $2s$ 个方程所成的齐次綫性方程組，未知数有 $2k$ 个，因此必有非零解. 这些解組成一个維数大于 0 的綫性空間 K，我們說，任一向量 y 必能写成 $y=\underset{1}{y}+\underset{2}{y}$ 的形式，这里 $\underset{1}{y}$ 为 e_a, e_{k+a} 的綫性組合，而 $\underset{2}{y}$ 滿足(1·3·17). 事实上，令

$$f(e_a, y)=c^{k+a}, \quad f(e_{k+a}, y)=-c^a,$$

又令 $\underset{1}{y}=c^ae_a+c^{k+a}e_{k+a}$, $\underset{2}{y}=y-c^ae_a-c^{k+a}e_{k+a}$，那末就有

$$f(e_a, \underset{2}{y})=f(e_a, y)-f(e_a, c^{k+b}e_{k+b})=c^{k+a}-c^{k+a}=0,$$

$$f(e_{k+a}, \underset{2}{y})=f(e_{k+a}, y)-f(e_{k+a}, c^be_b)=-c^a+c^a=0.$$

現在 K 中任取一非零 e_{s+1}，在 K 中还会有一向量 e_{k+s+1}，使滿足

$$f(e_{s+1}, e_{k+s+1})=1. \tag{1·3·18}$$

这因为，在 K 中必有向量 e，使 $f(e_{s+1}, e)\neq 0$，否則，根据剛才所說的事实，便会有 $f(e_{s+1}, y)=0$ 对任何 y 均成立，这和 $f(x, y)$ 是滿秩这一假設矛盾. 改变 e 的倍数，并令它为 e_{k+s+1}，就得到(1·3·18)式. 因此我們有了 $2(s+1)$ 个向量，能滿足

$$f(e_a, e_{k+b})=\delta_{ab}, \quad f(e_a, e_b)=0, \quad f(e_{k+a}, e_{k+b})=0$$
$$(a, b=1, 2, \cdots, s+1). \tag{1·3·19}$$

继續进行，最后我們就会得到 $n=2k$ 个向量，它們能滿足(1·3·14)式．又这 $2k$ 个向量必須为綫性无关的，因若成立

$$\lambda^{\alpha}e_{\alpha}+\lambda^{k+\alpha}e_{k+\alpha}=0,$$

分别和 e_{β} 及 $e_{k+\beta}$ 作数量积，就得出

$$\lambda^{k+\beta}=0,\quad \lambda^{\beta}=0.$$

这样就証明了定理 2.

在一复辛空間中，使数量积不变的綫性变換的全体所組成的群称为复辛群 $Sp(k, C)$。在辛标形下，有

$$g_{\alpha, k+\beta}=-g_{k+\beta, \alpha}=\delta_{\alpha\beta},\quad g_{\alpha\beta}=g_{k+\alpha, k+\beta}=0$$
$$(\alpha, \beta=1, 2, \cdots, k). \tag{1·3·20}$$

因而复辛群中元素所对应的方陣 (α_j^i) 所滿足的关系式（也为(1·3·12)的形狀)現化为

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\gamma=1}^{k}(\alpha_{\alpha}^{\gamma}\alpha_{\beta}^{k+\gamma}-\alpha_{\alpha}^{k+\gamma}\alpha_{\beta}^{\gamma})=0,\\&\sum_{\gamma=1}^{k}(\alpha_{k+\alpha}^{\gamma}\alpha_{k+\beta}^{k+\gamma}-\alpha_{k+\alpha}^{k+\gamma}\alpha_{k+\beta}^{\gamma})=0,\\&\sum_{\gamma=1}^{k}(\alpha_{\alpha}^{\gamma}\alpha_{k+\beta}^{k+\gamma}-\alpha_{\alpha}^{k+\gamma}\alpha_{k+\beta}^{\gamma})=\delta_{\alpha\beta}.\end{aligned}\right\} \tag{1·3·21}$$

如記为矩陣乘积的形式，(1·3·21)就是

$$(\alpha_j^i)'\left(\begin{array}{ccc|ccc}&0&&1&&0\\&&&&\ddots&\\&&&0&&1\\\hline-1&&0&&&\\&\ddots&&&0&\\0&&-1&&&\end{array}\right)(\alpha_j^i)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}&0&&1&&0\\&&&&\ddots&\\&&&0&&1\\\hline-1&&0&&&\\&\ddots&&&0&\\0&&-1&&&\end{array}\right), \tag{1·3·22}$$

这里 $(\alpha_j^i)'$ 表示方陣 (α_j^i) 的轉置．容易見到一綫性变換属于复辛群的充要条件是它使辛标形变为辛标形.

完全綫性群还有一个重要的子群，它是由 $\det|\alpha_j^i|=1$ 的变換全体所組成(依(1·2·6)式可知，这一条件是和基的选取无关

的),称为单模群. 在单模群下,基本的不变量是一个 n 綫性反称形式 $f(\underset{1}{x},\underset{2}{x},\cdots,\underset{n}{x})$,它的数值称为由 n 个向量 $\underset{1}{x},\underset{2}{x},\cdots,\underset{n}{x}$ 所成的"平行 $2n$ 面体"的"体积". 事实上,这样的 f 可写作

$$f(\underset{1}{x},\underset{2}{x},\cdots,\underset{n}{x})=a\varepsilon_{i_1\cdots i_n}\underset{1}{x}^{i_1}\cdots\underset{n}{x}^{i_n},\qquad(1\cdot3\cdot23)$$

这里 a 为常数,

$$\varepsilon_{i_1\cdots i_n}=\begin{cases}1 & \text{当 } (i_1,\cdots,i_n) \text{ 为 } 1,2,\cdots,n \text{ 的偶排列时},\\ -1 & \text{当 } (i_1,\cdots,i_n) \text{ 为 } 1,2,\cdots,n \text{ 的奇排列时},\\ 0 & \text{当 } (i_1,\cdots,i_n) \text{ 中至少有两个相同时}.\end{cases}$$

$$(1\cdot3\cdot24)$$

这时

$$\begin{aligned}f(A\underset{1}{x},\cdots,A\underset{n}{x})&=a\varepsilon_{i_1\cdots i_n}a^{i_1}_{j_1}\cdots a^{i_n}_{j_n}\underset{1}{x}^{j_1}\cdots\underset{n}{x}^{j_n}\\&=a\det|a^i_j|\,\varepsilon_{j_1\cdots j_n}\underset{1}{x}^{j_1}\cdots\underset{n}{x}^{j_n}\\&=a\varepsilon_{j_1\cdots j_n}\underset{1}{x}^{j_1}\cdots\underset{n}{x}^{j_n}=f(\underset{1}{x},\cdots,\underset{n}{x}).\end{aligned}$$

还可以选擇标形,使得 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 所成的平行 $2n$ 面体的体积为 1,这时 $a=1$. 事实上,只要适当改变某一基向量的倍数就可做到这一点.

直交群,辛群,单模群合称为典型群.

我們还要叙述一类重要的空間,这便是酉空間. 为此,先定义 Hermite 形式. 設 $f(x, y)$ 为定义在复向量空間中的函数,且滿足如下的条件:

1. $f(x, y)$ 关于第一个变向量 x 为綫性的,即

$$f(\lambda\underset{1}{x}+\mu\underset{2}{x},y)=\lambda f(\underset{1}{x},y)+\mu f(\underset{2}{x},y);\qquad(1\cdot3\cdot25)$$

2. $f(x, y)=\overline{f(y, x)}$, $\qquad(1\cdot3\cdot26)$

这里我們用"一横"表示复数的共軛,那末我們就称它为 P_n 中的 Hermite 形式. 对 Hermite 形式,还成立

$$f(x, \lambda \underset{1}{y} + \mu \underset{2}{y}) = \bar{\lambda} f(x, \underset{1}{y}) + \bar{\mu} f(x, \underset{2}{y}), \qquad (1\cdot3\cdot27)$$

这是由于

$$f(x, \lambda \underset{1}{y} + \mu \underset{2}{y}) = \overline{f(\lambda \underset{1}{y} + \mu \underset{2}{y}, x)} = \overline{\lambda f(\underset{1}{y}, x) + \mu f(\underset{2}{y}, x)}$$

$$= \bar{\lambda} \overline{f(\underset{1}{y}, x)} + \bar{\mu} \overline{f(\underset{2}{y}, x)} = \bar{\lambda} f(x, \underset{1}{y}) + \bar{\mu} f(x, \underset{2}{y}).$$

由此也就見到

$$f(x^i e_i, y^j e_j) = f(e_i, e_j) x^i \bar{y}^j,$$

即 Hermite 形式也由它对基向量的数值所确定．如記

$$g_{ij} = f(e_i, e_j),$$

則有

$$g_{ij} = \overline{g_{ji}}.$$

由性质 2 还可見到 $f(x, x) = \overline{f(x, x)}$，这表示 $f(x, x)$ 为实数．如果还满足条件：$f(x, x) \geqslant 0$，且等号只有在 x 为零向量时成立，那末 $f(x, y)$ 就称为正定的 Hermite 形式．

以正定的 Hermite 形式来定义两向量的数量积的复向量空間称为 U（酉）空間．在 U 空間中可以定义向量的直交性，向量的长度．由单位的而且互相直交的向量所成的标形称为酉标形．我們要証明

定理 3 在酉空間中必存在酉标形．

【証】 任意取一非零向量 e，必有 $f(e, e) = c > 0$，取 $\frac{1}{\sqrt{c}} e$ 为 e_1，則 $f(e_1, e_1) = 1$．設我們已有向量 e_α $(\alpha = 1, 2, \cdots, m < n)$，它們之間有关系

$$f(e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}.$$

考察方程

$$f(e_\alpha, y) = 0,$$

它必有非零解，改变倍数，我們就能选得 e_{m+1}，使

$$f(e_\alpha, e_\beta)=\delta_{\alpha\beta}$$

对 $\alpha, \beta=1, 2, \cdots, m+1$ 也成立．所以利用逐次添加的方式可以得到 n 个互为直交的单位向量 e_i．和从前一样，可以明显地看到 e_i 为綫性无关的．定理証毕．

在酉空間中，使两向量的数量积不变的綫性变换称为酉变换，它的条件是

$$f(\boldsymbol{A}x, \boldsymbol{A}y)=f(x, y)$$

或

$$g_{ij}\alpha^i_k\alpha^j_l=g_{kl}.$$

特别，参考于空間的酉标形时，我們有

$$g_{ij}=\delta_{ij},$$

而 (α^i_k) 就成为酉陣，卽它的轉置共軛符合于它的逆陣．酉变換的全体成为酉群 $U(n)$．显然，一綫性变換为酉变換的充要条件是它使酉标形化为酉标形．

酉空間还有下面一个性质：如果酉空間中两个子空間互相直交，那末两子空間只有零向量为公共的．这因为，設 x 为公共向量，那它就必須和自身直交，卽 $f(x, x)=0$，依正定性的要求，就推出 $x=0$．

辛向量空間和复欧氏向量空間沒有此性质．

§1·4 实向量空間及它的复化

直到現在为止，我們是在复数域中討論綫性空間，但在許多場合下，我們要应用的将是实数域上的綫性空間或实向量空間的性质．§1·1—§1·2 的所有的討論都可适用于实向量空間，这因为在这里只用到复数的加、减、乘、除以及解复数域上的綫性方程，而在实数域上进行这些运算，其規則和复数域完全相同．另外，在 §1·3 中关于复辛向量空間的討論，也完全可以

移到实数域上来，而得到实辛向量空間和实辛群 $Sp(n, R)$. 关于单模群的討論也是如此，我們可以照样地定义实单模群.

但是，有关复欧氏向量空間的討論不能直接移到实欧氏空間来，因为在定理 1 的証明中我們用到了开平方运算，而在实数域中負实数开平方就成为复数，所以不能把定理 1 移用过来. 因而，我們要对实欧氏空間作一补充的定义.

一个对称的实的双綫性形式 $f(x, y)$，如它所对应的二次形式 $f(x, x) \geqslant 0$，且等号只有在 $x=0$ 时成立，就称它为正定的. 显然，正定必然为满秩.

实向量空間如以一正定的双綫性形式来定义两向量間的数量积，那末就称該空間为实欧氏向量空間. 对实欧氏向量空間，非零向量的长度为正实数. 也可定义向量的直交性，可定义直交规范标形，因为正实数的平方根为实数，故定理 1 的关于直交规范标形存在性的証明仍有效(还可稍微簡单一些). 对实欧氏向量空間，两个互相直交的子空間除零向量外无公共向量，在这一点上它和复欧氏向量空間有很大的差别.

使定义实欧氏空間的数量积的双綫性形式不变的实綫性变換的全体組成实直交群 $O(n, R)$，在直交规范标形下，它的元素对应实数所組成的直交矩陣.

在实向量空間中如以非正定也非負定(但为满秩)的双綫性形式来定义向量的数量积，所得到的空間就称为拟欧氏向量空間. 这样的空間不止一种，要看对称方陣 (g_{ij}) 的特征根中正根的个数(或負根的个数)而作出分类. 特别是 $n=4$，正特征根数等于 1 时，所对应的向量空間在相对論中有重要的意义.

設已給一实向量空間 R_n，可以用下面的方法作出一个复向量空間 P_n，使 R_n 中的元素也同时是 P_n 中的元素，这样的 P_n 称为实向量空間 R_n 的复化. 設 R_n 中已取好一組基

$$e_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

作集合 $\lambda^i e_i$，于此 λ^i 为任意的复数，并規定不同的 λ^i 所对应的元素为不同的．依

$$\lambda^i e_i + \mu^i e_i = (\lambda^i + \mu^i) e_i,$$
$$\lambda(\lambda^i e_i) = (\lambda \lambda^i) e_i$$

定义集合中的元素的加法及和复数的乘法．显然，这样的集合是一个复向量空間 P_n，而当 λ^i 取实数时 $\lambda^i e_i$ 可看成既属于 P_n 又属于 R_n 的元素．似乎 P_n 的制作和 R_n 的基的选擇有关，但如果規定依 R_n 中的 $e'_i = a^j_i e_j$ 所作的 $\lambda^i e'_i$ 就等于依 e_i 所作出的 P_n 中的元素 $\lambda^i a^j_i e_j$，那末 R_n 的复化就仍然是依 e_i 所作出的 P_n．附带指出，R_n 虽然能作为 P_n 的子集，但并不是 P_n 的子空間．

相反地，在一复向量空間 P_n 中可以作出一个 n 維的实向量空間 R_n，使它的复化就是 P_n，而且 R_n 的作法是无限多的．事实上，在 P_n 中任取 n 个綫性无关的向量 e_i，作 $\lambda^i e_i$ 的集合，于此 λ^i 为实数，这样就得到一个 n 維的实向量空間，它的复化显然为 P_n．以不同的 e_i 所作出的 R_n 未必相同，例如 $(a+ib)e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n$ (a, b 实数，$b \neq 0$) 和 $e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n$ 所作出的 R_n 是不相同的，前者包含向量 $(a+bi)e_1$，而后者不包含这一向量．

安放了一个确定的 R_n 的 P_n 称为具实結构的复向量空間，属于 R_n 的向量称为 P_n 的实向量，由綫性无关的实向量所成的标形称为实标形．P_n 的子空間 K_m 如由实的向量所張成（即由 R_n 中的向量以复系数的綫性組合所生成），那末就称它为实的子空間或实平面．应該注意，K_m 本身并不是实数域上的綫性空間，而是复数域上的綫性空間，它不仅包含实的向量，也还包含非实的向量．但由定义立即可以知道，根据 P_n 的实結构，可以得到实子空間也具有实結构，K_m 和 R_n 的交集为 m 維的实数域上的綫性空間．

具实結构的复向量空間中可定义一項共軛运算，这种运算是把一个向量对应于另一和它共軛的向量，这就是，向量 $e=\lambda^i e_i$ 到向量 $\bar{e}=\bar{\lambda}^i e_i$ 的对应，这里 e_i 是一組实的基．这个定义也和 R_n 的基的取法(当然限于实向量)无关．立即可以見到，$\bar{e}_i=e_i$；又向量 e 为实向量的充要条件是 $\bar{e}=e$．这因为，把 e 表为 $\lambda^i e_i$，λ^i 为实数的充要条件恰为 $\bar{\lambda}^i=\lambda^i$．又显然可見

$$\overline{\lambda\xi+\mu\eta}=\bar{\lambda}\bar{\xi}+\bar{\mu}\bar{\eta},$$

对任何复数 λ, μ 及向量 ξ, η 成立．

設 K_m 为一平面，作 K_m 中向量的共軛向量的全体，构成集合 $\overline{K}_m$，$\overline{K}_m$ 显然也为一子空間．事实上，設 $\xi\in\overline{K}_m$，$\eta\in\overline{K}_m$，則有 $\bar{\xi}\in K_m$，$\bar{\eta}\in K_m$，因此对任意的 λ, μ 有 $\bar{\lambda}\bar{\xi}+\bar{\mu}\bar{\eta}\in K_m$，因此 $\lambda\xi+\mu\eta\in\overline{K}_m$．

我們要証

定理　具实結构的复向量空間中的一平面 K_m 为实平面的充要条件是 $K_m=\overline{K}_m$．

【証】　当 K_m 为实平面时，在 K_m 上有 m 个綫性无关的实向量 ξ_α，而 K_m 中的元素的全体为 $\lambda^\alpha\xi_\alpha(\alpha=1, 2, \cdots, m)$，而 $\overline{\lambda^\alpha\xi_\alpha}=\bar{\lambda}^\alpha\xi_\alpha$ 仍然构成 K_m 中的全体元素，故 $K_m=\overline{K}_m$．

相反地，当 $K_m=\overline{K}_m$ 时，K_m 中必有实向量，因設 $\eta\in K_m$ 为非零向量，那末 $\bar{\eta}\in K_m$，$\frac{i}{2}(\eta-\bar{\eta})\in K_m$，如果 $\eta=\bar{\eta}$，則 η 本身为实向量，如果 $\eta\neq\bar{\eta}$，那末 $\frac{i}{2}(\eta-\bar{\eta})$ 为非零的实向量．現証 K_m 中必有 m 个綫性无关的实向量．如果 K_m 中只能取到 s 个 $(s<m)$ 綫性无关的实向量 ξ_1, ξ_2, $\cdots$, ξ_s；这时就应存在一个向量 $\eta\in K_m$，它不能表为 ξ_1, ξ_2, $\cdots$, ξ_s 的复系数的綫性組合．由假定，$\bar{\eta}\in K_m$，因而 $\frac{1}{2}(\eta+\bar{\eta})$，$\frac{i}{2}(\eta-\bar{\eta})$ 均属于 K_m，它們都

是实向量，因此它們均为 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ 的实系数綫性組合，即成立

$$\frac{1}{2}(\eta+\bar{\eta})=b^\beta\xi_\beta,\quad \frac{i}{2}(\eta-\bar{\eta})=c^\beta\xi_\beta\quad (\alpha,\ \beta=1,\ \cdots,\ s),$$

由此就得

$$\bar{\eta}=(b^\beta-ic^\beta)\xi_\beta,$$

这就发生矛盾．因此 K_m 中必有 m 个綫性无关的实向量，因此为实的平面．定理証毕．

根据这定理还可知道，平面 K_m 和 $\bar{K}_m$ 的交与和均为实平面．因为

$$\overline{K_m\cap\bar{K}_m}=\bar{K}_m\cap K_m=K_m\cap\bar{K}_m,$$
$$\overline{K_m+\bar{K}_m}=\bar{K}_m+K_m=K_m+\bar{K}_m.$$

再指出，一个 n 維的复向量空間 P_n 也总可以把它看成 $2n$ 維的实向量空間 R_{2n}．事实上，設 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 P_n 的基，作

$$e_{n+j}=ie_j$$

而把 $e_1, \cdots, e_{2n}$ 視为一个 $2n$ 維的实向量空間 R_{2n} 的基，如果 $\lambda^j=a^j+ia^{n+j}$，a^j，a^{n+j} 为实数，那末 P_n 中的元素 $\lambda^j e_j$ 就和 R_{2n} 中的元素 $a^\alpha e_\alpha\ (\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n)$ 一一对应．在这样的制作下，P_n 中的 s 維子空間对应于 R_{2n} 中的 $2s$ 維子空間，P_n 中的綫性变换也对应于 R_{2n} 中的变换．但并非 R_{2n} 中的任意子空間，張量，綫性变换均能对应 P_n 中的子空間，張量和綫性变换．例如 R_{2n} 中的奇維数的子空間就不能对应于 P_n 中的子空間；又如 P_n 中的方陣

$$(a^j_k)=(c^j_k+id^j_k)$$

所表示的綫性变换在 R_{2n} 中对应的綫性变换为下述的特殊形式的 $2n\times 2n$ 方陣：

$$\left(\begin{array}{c|c} c^j_k & -d^j_k \\ \hline d^j_k & c^j_k \end{array}\right), \tag{1·4·1}$$

这是因为 $\boldsymbol{A}e_k=c_k^je_j+d_k^je_{n+j}$, $\boldsymbol{A}e_{n+k}=-d_k^je_j+c_k^je_{n+j}$ 的緣故.

此外,由于

$$|\det|a_k^j||^2=\begin{vmatrix}c_k^j+id_k^j & 0\\ 0 & c_k^j-id_k^j\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_k^j & -d_k^j\\ d_k^j & c_k^j\end{vmatrix}. \qquad (1\cdot4\cdot2)$$

所以如 P_n 中的綫性变换为非异,那末对应于 R_{2n} 中的变换也为非异,且在 R_{2n} 中能由(1·4·1)所示形式的方陣表达的非异綫性变换也必对应于 P_n 中某一非异变换. R_{2n} 中这样的变换組成和 $GL(n, C)$ 同构的綫性群,我們称它为 $GL(n, C)$的实形态.

§1·5 可約綫性群和不可約綫性群

P_n(或 R_n) 中的綫性变换群可以分为两大类. 一类称为不可約的,它沒有任何非平凡的不变子空間,这就是說,在 P_n(或 R_n)不存在 m 維的 $(0<m<n)$ 子空間,其上的向量經过群中的变换后,仍保持在該子空間之中. 另一类称为可約的,它至少有一个非平凡的不变子空間[1].

設綫性变换群 G 为可約的,那末它就有一 m 維的不变子空間 $K_m(0<m<n)$. 取基 $\{e_i\}$, 使 $e_1, e_2, \cdots, e_m$ 在 K_m 上. 設 $\boldsymbol{A}\in G$, 則有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}e_\alpha&=a_\alpha^\beta e_\beta \quad (\alpha, \beta=1, 2, \cdots, m),\\ \boldsymbol{A}e_p&=a_p^ie_i \quad (p=m+1, \cdots, n).\end{aligned} \qquad (1\cdot5\cdot1)$$

因此变换的方陣可写为

$$\left(\begin{array}{c|c}a_\alpha^\beta & a_p^\beta\\ \hline 0 & a_p^q\end{array}\right) \qquad (1\cdot5\cdot2)$$

的形状. 特别当 G 为使 K_m 不变的非异綫性变换的全体所成的群时,它所对应的方陣就是形为 (1·5·2) 的非异方陣的

[1] 对于一个綫性变换的集合(不必构成群),也可以同样地定义它的可約性和不可約性.

全体．

如果綫性群 G 有两个不变平面 K_m 和 K_{n-m}，且为互补(即 K_m 和 K_{n-m} 的交只是零向量，也就是 K_m 和 K_{n-m} 的直和为全空間)，那末可取基 $\{e_i\}$，使 $e_1, \cdots, e_m$ 在 K_m 之中，$e_{m+1}, \cdots, e_n$ 在 K_{n-m} 之中，群中的元素所对应的方陣为

$$\left(\begin{array}{c|c} a_\alpha^\beta & 0 \\ \hline 0 & a_p^q \end{array}\right), \tag{1·5·3}$$

而使 K_m 和 K_{n-m} 不变的最大的群中的元素所对应的方陣为由(1·5·3)形状的非异方陣全体所构成．

我們可以举出許多不可約的綫性群的例子．我們易知在复数域中，复辛群是不可約的，因为根据 §1·3 的論述，任何非零向量均可作为辛标形的第一个基向量，面复辛群是把一个固定的辛标形变到任意的辛标形的綫性变換所組成，因此，它能把一个固定的非零向量变到任一其他的非零向量，所以它們不会有非平凡的不变空間．又完全綫性群 $GL(n, C)$ 以这辛群为子群，所以也是不可約的．单模群的不可約性可同样証明．又酉群也是不可約的，因为根据 §1·3 的論述，任何单位向量均可作为酉标形的第一个基，而任何一个向量均可适当改变倍数面成为单位向量，因而就和复辛群的不可約性一样地証明它的不可約性．在实数域中，直交群 $O(n, R)$ 的不可約性，实辛群的不可約性的証明是相同的，还可以証明复直交群也是不可約的．

設在实向量空間 R_n 中有一个实綫性群 G，当 R_n 复化成 P_n 时，这个实綫性群也可視为作用于 P_n 中的綫性群．这就是，当 R_n 的基选定时，G 中的元素 A 所对应的方陣就肯定下来了，如把这个方陣看成在 P_n 中的一个綫性变換所对应的方陣，就得到 P_n 中的一个綫性变換．这样所得到的綫性变換及綫性变换群

分別称为 R_n 中綫性变换及綫性变换群的复化.

可約的实綫性群复化之后显然为可約的，但不可約的实綫性群在复化之后却未必能保持为不可約．現在来研究这种情形．設 G 为实綫性群，复化后显然不能有实非平凡的不变平面．現設它有复的不变平面 K，那末 K 的共軛 $\overline{K}$ 也为不变平面．显然 $K+\overline{K}$ 必为不变平面，又为实平面，因此 $K+\overline{K}$ 的維数必为 n，而 K 的維数必須不小于 $\frac{n}{2}$；又因 K 和 $\overline{K}$ 的交也必須为不变平面，又为实平面，所以必須只包含零向量．因而 K 的維数必須不大于 $\frac{n}{2}$，因此 K 的維数为 $\frac{n}{2}$，n 必为偶数．設

$$n=2m,$$

依剛才討論，有两个不变平面 K_m 和 $\overline{K}_m$. $K_m+\overline{K}_m=P_n$，$K_m \cap \overline{K}_m$ 只包含零向量．在 K_m 上取一組基，記它們为

$$a_1+ib_1,\ a_2+ib_2,\ \cdots,\ a_m+ib_m,$$

这里 a_α, $b_\alpha(\alpha=1, 2, \cdots, m)$ 均为实向量．在空間的实标形下，群 G 中的綫性变换 $\boldsymbol{A}$ 所对应的方陣的元素均为实数，所以 $\boldsymbol{A}a_\alpha$, $\boldsymbol{A}b_\alpha$ 均为实向量．又因 K_m 为不变平面，$\boldsymbol{A}(a_\alpha+ib_\alpha)$ 为 $a_\beta+ib_\beta(\beta=1, 2, \cdots, m)$ 的綫性組合，所以 $\boldsymbol{A}a_\alpha$, $\boldsymbol{A}b_\alpha$ 均为 a_β, b_β 的綫性組合，所以 $a_1, \cdots, a_m$; $b_1, \cdots, b_m$ 張成一个实的不变平面．由于群为实不可約，$a_1, \cdots, b_m$ 又不全为零向量，所以它們必須張成全空間．因空間为 $n=2m$ 維的，所以它們构成一基．再利用

$$\boldsymbol{A}(a_\alpha+ib_\alpha)=(c_\alpha^\beta+id_\alpha^\beta)(a_\beta+ib_\beta),$$

就得出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}a_\alpha&=c_\alpha^\beta a_\beta-d_\alpha^\beta b_\beta,\\ \boldsymbol{A}b_\alpha&=d_\alpha^\beta a_\beta+c_\alpha^\beta b_\beta.\end{aligned}\tag{1·5·4}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的方陣具形状

$$\left(\begin{array}{c|c} c_\alpha^\beta & d_\alpha^\beta \\ \hline -d_\alpha^\beta & c_\alpha^\beta \end{array}\right), \tag{1·5·5}$$

这就是說，R_{2m} 中的群 G 为 $GL(m, C)$ 的实形态的一个子群. 相反地，凡具所示形状的方陣的非异綫性变換必以 $a_\alpha+ib_\alpha$ 張成的复平面为不变平面. 因此得

定理 R_n 中不可約的綫性群 G 經复化后成为可約的充要条件是：

（i） $n=2m$,

（ii） G 为 $GL(m, C)$ 的实形态的子群.

根据剛才的定理，$GL(m, C)$ 的实形态本身复化后为可約，我們来証明这个群在 R_{2m} 中为不可約. 为此，由于

$$\boldsymbol{A}a_1=c_1^\beta a_\beta-d_1^\beta b_\beta, \tag{1·5·6}$$

如取 $(c_1^\beta, -d_1^\beta)$ 为任意一組不全为零的实数，利用 (1·4·2) 式不难驗証，必存在常数 $c_2^\beta, \cdots, c_m^\beta, d_2^\beta, \cdots, d_m^\beta$，使陣 (1·5·5) 为非异的，因此，这一群中存在着变换，它能使 a_1 变为任一已給的非零向量，所以，群的任一不变平面如含有一向量 c，那末利用群中的使 a_1 变为 c 的变換的逆变換，就可見这一不变平面必含向量 a_1，再由剛才所說的性质就知道，这一不变平面就必須是全空間.

从这个例子可以見到，R_n 中确有复化后成为可約的不可約綫性群.

第二章　外微分形式. Pfaff 方程

§2·1　Pfaff 式及外微分形式

在本章中我們将为后文的研究作出分析方面的准备，主要是有关外微分形式及 Pfaff 方程的一些事項、进一步的討論可参考 Cartan E. [2], Рашевский П. К. [1], Фиников С. П. [1].

現設 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ 为 n 个独立的实变量，它們的变化范圍为 n 維的变量的空間的一个区域 G. 在本章中，我們又假定所遇到的函数为充分光滑的，即它們具有所需要的任何阶的連續的导数.

我們把自变量的微分 dx^i 也看成自变量，它可以采取所有可能的 n 个有序实数为其数值. 这样，定义在区域 G 中的函数 $f(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 的全微分

$$df(x^1, \cdots, x^n) = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \qquad (2\cdot1\cdot1)$$

就可視为 $2n$ 个变量的函数. 自变量 x^i 的变化范圍为区域 G，而 dx^i 可取任何数值，且它关于 dx^i 是綫性形式.

在后文中，我們經常要用更一般的一些包含 x^i 和 dx^i 的函

数,它們关于 dx^i 是綫性的,这就是形状为

$$\omega(x, dx)=a_i(x)dx^i \tag{2·1·2}$$

的微分表达式,这里的 $a_i(x)$ 仅和 $x^1, \cdots, x^n$ 有关. 这样的表达式通称为 Pfaff 式或一次微分形式. 当 x^i, dx^i 的数值給定时, $\omega(x, dx)$ 的数值也就确定了.

我們时常也会碰到 k 个微分 $d_1x^i, d_2x^i, \cdots, d_kx^i$ 的一次微分形式,它們关于各組微分分別为綫性的(k 綫性形式),其系数为 x^i 的函数,而且这形式关于各組微分是反称的,这就是形状为

$$\Omega(x, dx)=a_{i_1i_2\cdots i_k}(x)d_1x^{i_1}d_2x^{i_2}\cdots d_kx^{i_k} \tag{2·1·3}$$

的微分表达式,且 $a_{i_1i_2\cdots i_k}$ 关于下标为反称. 这样的表达式通常称为 k 次外微分形式. 我們引入記号

$$[dx^i, dx^j]=\begin{vmatrix} d_1x^i & d_1x^j \\ d_2x^i & d_2x^j \end{vmatrix},$$

$$[dx^i, dx^j, dx^k]=\begin{vmatrix} d_1x^i & d_1x^j & d_1x^k \\ d_2x^i & d_2x^j & d_2x^k \\ d_3x^i & d_3x^j & d_3x^k \end{vmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{2·1·4}$$

$$[dx^{i_1}, dx^{i_2}, \cdots, dx^{i_k}]=\begin{vmatrix} d_1x^{i_1} & d_1x^{i_2} & \cdots & d_1x^{i_k} \\ d_2x^{i_1} & d_2x^{i_2} & \cdots & d_2x^{i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_kx^{i_1} & d_kx^{i_2} & \cdots & d_kx^{i_k} \end{vmatrix},$$

就可以把外微分形式写成較为方便的形式. 具体說来,我們可以把 $\Omega(x, dx)$ 写作

$$\begin{aligned}\Omega(x, dx)&=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} a_{i_1i_2\cdots i_k}[dx^{i_1}, dx^{i_2}, \cdots, dx^{i_k}]\\ &=\frac{1}{k!}a_{i_1i_2\cdots i_k}[dx^{i_1}, dx^{i_2}, \cdots, dx^{i_k}]\end{aligned} \tag{2·1·5}$$

的形状,这里的第一个等号是由于把系数的下指标如 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 的各种排列的項先迭加起来,再利用系数的反称性及行列式

的定义而得到；又利用 $a_{i_1\cdots i_k}$ 关于下指标的反称性和 $[dx^{i_1}, \cdots, dx^{i_k}]$ 关于上指标的反称性，就得到第二个等号．作为一个微分表达式来看，我們自然可以把同次的外微分形式相加，又可以在外微分形式前乘上一个函数．

我們还可依如下的方式来定义 k 个 Pfaff 式 $\omega^1(d),\cdots,\omega^k(d)$ 的外积 $[\omega^1, \cdots, \omega^k]$：

$$[\omega^1, \cdots, \omega^k]=\begin{vmatrix}\omega^1(d_1) & \omega^1(d_2) & \cdots & \omega^1(d_k)\\ \omega^2(d_1) & \omega^2(d_2) & \cdots & \omega^2(d_k)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \omega^k(d_1) & \omega^k(d_2) & \cdots & \omega^k(d_k)\end{vmatrix}, \quad (2\cdot1\cdot6)$$

它是 k 組微分 $d_1x^i, \cdots, d_kx^i$ 的 k 綫性形式，且关于它們是反称的，因此也是一个外微分形式．事实上，如果

$$\omega^\alpha(x, dx)=a_i^\alpha(x)dx^i,$$

那末，依行列式的性质立即有

$$[\omega^1, \cdots, \omega^k]=a_{i_1}^1a_{i_2}^2\cdots a_{i_k}^k[dx^{i_1}, dx^{i_2}, \cdots, dx^{i_k}]. \quad (2\cdot1\cdot7)$$

通常，我們要把系数写成关于下指标反称的形式，所以引入反称化的系数

$$a_{[i_1}^1a_{i_2}^2\cdots a_{i_k]}^k=\frac{1}{k!}\varepsilon_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_k}a_{j_1}^1\cdots a_{j_k}^k, \quad (2\cdot1\cdot8)$$

这里

$$\varepsilon_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_k}=\begin{cases}0 & i_1\cdots i_k \text{ 至少有两个相同，或 } j_1\cdots j_k \text{ 并非 } i_1\cdots i_k \text{ 的排列},\\ 1 & j_1\cdots j_k \text{ 为 } i_1\cdots i_k \text{ 的偶排列},\\ -1 & j_1\cdots j_k \text{ 为 } i_1\cdots i_k \text{ 的奇排列}.\end{cases}$$

因此，就能把 $[\omega^1, \cdots, \omega^k]$ 写作

$$[\omega^1, \cdots, \omega^k]=a_{[i_1}^1a_{i_2}^2\cdots a_{i_k]}^k[dx^{i_1}, \cdots, dx^{i_k}]. \quad (2\cdot1\cdot9)$$

附带指出，(2·1·4) 应視为 (2·1·6) 的特殊情况，这就是：在

$$\omega^1(d)=dx^{i_1}, \quad \omega^2(d)=dx^{i_2}, \cdots, \omega^k(d)=dx^{i_k}$$

的情形，这些式子的右边各表示特殊的 Pfaff 式．由(2·1·6)也可看出，当 Pfaff 式作外积，任意交换两个因子时，乘积要变号．在有些著作中，外积用記号"∧"来表示，即

$$[\omega^1,\ \omega^2]=\omega^1\wedge\omega^2,\cdots,[\omega^1,\ \cdots,\ \omega^k]=\omega^1\wedge\omega^2\wedge\cdots\wedge\omega^k.$$

一次的外微分形式即 Pfaff 式，次数大于 n 的外微分形式依定义恒为 0．

此外，我們还可以定义两个外微分形式的外积．为此，先規定 $[\omega^1,\ \cdots,\ \omega^s]$ 和 $[\omega^{s+1},\ \cdots,\ \omega^k]$ 的外积为

$$[[\omega^1,\ \cdots,\ \omega^s],\ [\omega^{s+1},\ \cdots,\ \omega^k]]$$
$$=[\omega^1,\ \cdots,\ \omega^s,\ \omega^{s+1},\ \cdots,\ \omega^k], \qquad (2\cdot1\cdot10)$$

特别，

$$[[dx^{i_1},\ \cdots,\ dx^{i_s}],\ [dx^{i_{s+1}},\ \cdots,\ dx^{i_k}]]$$
$$=[dx^{i_1},\ \cdots,\ dx^{i_s},\ dx^{i_{s+1}},\ \cdots,\ dx^{i_k}], \qquad (2\cdot1\cdot11)$$

然后規定在作外积时有綫性关系：

$$\left.\begin{aligned}&[a\Omega_1+b\Omega_2,\ \Omega]=a[\Omega_1,\ \Omega]+b[\Omega_2,\ \Omega],\\&[\Omega,\ a\Omega_1+b\Omega_2]=a[\Omega,\ \Omega_1]+b[\Omega,\ \Omega_2],\end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot1\cdot12)$$

于此 a, b 为任意的函数，那末，就可作任意两外微分形式的外积．又(2·1·10)式表明：如 Ω_1, Ω_2 各为 k 次及 l 次的外微分形式，那末

$$[\Omega_1,\ \Omega_2]=(-1)^{kl}[\Omega_2,\ \Omega_1].$$

自然，我們还可以定义若干个外微分形式的外积，例如 $[[\Omega_1,\ \Omega_2],\ \Omega_3]$, $[\Omega_1,\ [\Omega_2,\ \Omega_3]]$，但容易見到这两个外微分形式是相等的，所以我不妨記它們为

$$[\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3].$$

对多个外微分形式作外积时也是如此，而 $[\omega^1,\ \cdots,\ \omega^s]$ 等表达式就可以理解为 s 个Pfaff 式的外积．

我們也常把 G 上的函数了解为零次的外微分形式，而定义

$$[f;\ \Omega]=f\Omega. \tag{2·1·13}$$

§ 2·2 外微分运算. Poincaré 定理

对于外微分形式我們可以进行一种微分运算，它使一 k 次的外微分形式化为$(k+1)$次的外微分形式，同时滿足可加性条件. 具体地説，設 $\Omega=a[dx^{i_1},\cdots,\ dx^{i_k}]$ 为一个单項的外微分形式，規定它的外微分 $D\Omega$ 为

$$D\Omega=[da,\ dx^{i_1},\ \cdots,\ dx^{i_k}]$$
$$=\frac{\partial a}{\partial x^i}[dx^i,\ dx^{i_1},\ \cdots,\ dx^{i_k}], \tag{2·2·1}$$

又規定

$$D(\Omega_1+\Omega_2)=D\Omega_1+D\Omega_2, \tag{2·2·2}$$

那末对任一外微分形式

$$\Omega=\frac{1}{k!}a_{i_1\cdots i_k}[dx^{i_1},\ \cdots,\ dx^{i_k}]$$

就有

$$D\Omega=\frac{1}{k!}[da_{i_1\cdots i_k},\ dx^{i_1},\ \cdots,\ dx^{i_k}]. \tag{2·2·3}$$

特别，当 Ω 为一函数 f 时，

$$D\Omega=Df=df=\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i, \tag{2·2·4}$$

当 Ω 为 Pfaff 式 $\omega=a_idx^i$ 时，

$$D\omega=[da_i,\ dx^i]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j}-\frac{\partial a_j}{\partial x^i}\right)[dx^j,\ dx^i]. \tag{2·2·5}$$

我們也可以对外积进行外微分运算，而得到如下的公式:

$$D[\Omega_1,\ \Omega_2]=[D\Omega_1,\ \Omega_2]+(-1)^k[\Omega_1,\ D\Omega_2], \tag{2·2·6}$$

于此 k 为 Ω_1 的次数.

事实上，如設 Ω_1, Ω_2 为单項的外微分形式:

$$\Omega_1 = a[dx^{i_1}, \cdots, dx^{i_k}], \quad \Omega_2 = b[dx^{j_1}, \cdots, dx^{j_l}],$$

那末

$$[\Omega_1, \Omega_2] = ab[dx^{i_1}, \cdots, dx^{i_k}, dx^{j_1}, \cdots, dx^{j_l}],$$

而

$$\begin{aligned} D[\Omega_1, \Omega_2] &= [d(ab), dx^{i_1}, dx^{i_2}, \cdots, dx^{i_k}, dx^{j_1}, \cdots, dx^{j_l}] \\ &= b[da, dx^{i_1}, \cdots, dx^{j_l}] + a[db, dx^{i_1}, \cdots, dx^{j_l}] \\ &= [[da, dx^{i_1}, \cdots, dx^{i_k}], b[dx^{j_1}, \cdots, dx^{j_l}]] \\ &\quad + (-1)^k[a[dx^{i_1}, \cdots, dx^{i_k}], [db, dx^{j_1}, \cdots, dx^{j_l}]] \\ &= [D\Omega_1, \Omega_2] + (-1)^k[\Omega_1, D\Omega_2]. \end{aligned}$$

这就是：(2·2·6)式对两个单项的外微分形式成立．由于任意的外微分形式总可以表达为若干个单项的外微分形式之和，由外积运算规则 (2·1·12) 和外微分运算的规则 (2·2·2)，就可推出 (2·2·6)式对一般的 Ω_1, Ω_2 均成立．

作为(2·2·6)式的一个特例，我們有

$$D(a\Omega) = [da, \Omega] + aD\Omega. \tag{2·2·7}$$

自然，我們也能对多个外形式的外积进行外微分，特別对 s 个 Pfaff 式的外积进行外微分时，我們有

$$\begin{aligned} D[\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^s] = [D\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^s] & \\ - [\omega^1, D\omega^2, \cdots, \omega^s] + \cdots & \\ + (-1)^{s-1}[\omega^1, \omega^2, \cdots, D\omega^s]. & \end{aligned} \tag{2·2·8}$$

設 Ω 为任一外微分形式，$D\Omega$ 为其外微分，我們有如下的 Poincaré 定理：

定理 Ω 的外微分 $D\Omega$ 的外微分恒等于 0，即

$$D(D\Omega) = 0. \tag{2·2·9}$$

事实上，对 Ω 为零次，即当 Ω 为函数 f 时，

$$Df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

而

$$DDf=\left[d\frac{\partial f}{\partial x^i},\ dx^i\right]=\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}[dx^j,\ dx^i]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)[dx^j,\ dx^i]=0. \quad (2\cdot2\cdot10)$$

对一般的 Ω,

$$\Omega=\frac{1}{k!}a_{i_1\cdots i_k}[dx^{i_1},\ \cdots,\ dx^{i_k}],$$

我們有

$$D\Omega=\frac{1}{k!}[da_{i_1\cdots i_k},\ dx^{i_1},\ \cdots,\ dx^{i_k}].$$

再进行外微分,利用(2·2·8)式及(2·2·10)式,就見到(2·2·9)式能够成立.

这个定理的逆定理也在一定的意义下成立:如果 Ω_1 为一外微分形式,在区域 G 内成立

$$D\Omega_1=0, \quad (2\cdot2\cdot11)$$

又設 P 为 G 的一点,那末在 P 点有一邻域 G_1, 在其上必存在外微分形式 Ω, 使

$$\Omega_1=D\Omega \quad (2\cdot2\cdot12)$$

在 G_1 成立.

我們只对 Ω_1 为一次和二次时証明这个事实,一般情况的討論可以参考有关的专著.

如果ω为 Pfaff 式 $\omega=a_i dx^i$,又如 $D\omega=0$,那末依(2·2·5)式就有

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^j}-\frac{\partial a_j}{\partial x^i}=0,$$

因此微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}=a_i \quad (2\cdot2\cdot13)$$

的积分可能条件能够满足，所以对任意的 $P\in G$，有邻域 G_1 及在其上定义的函数 f，使在 G_1 上能满足(2·2·13)，即

$$\omega=df.$$

再考察 Ω_1 为二次外微分形式

$$\Omega_1=\frac{1}{2!}a_{ij}[dx^i,\ dx^j]\quad (a_{ij}=-a_{ji})\qquad (2\cdot 2\cdot 14)$$

的情形．先設空間維数为 2，这时

$$\Omega_1=a(x^1,\ x^2)[dx^1,\ dx^2],$$

而 $D\Omega_1=0$ 恒成立，只要令

$$A(x^1,\ x^2)=\int_{c^1}^{x^1}a(\xi,\ x^2)d\xi,$$

$$\Omega(x,\ dx)=A(x^1,\ x^2)dx^2,$$

我們就有

$$D\Omega=\Omega_1.$$

从此也可見到，如果 a 还充分光滑地依賴于另一些参数，那末 A 也能充分光滑地依賴于这些参数．

对于一般的 n，条件 $D\Omega_1=0$ 就是

$$D\Omega_1=\frac{1}{2!}\sum\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}[dx^k,\ dx^i,\ dx^j]=0,$$

再利用 $a_{ij}=-a_{ji}$，就得出

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}=0.\qquad (2\cdot 2\cdot 15)$$

如設 $\Omega=a_idx^i$，則 $D\Omega=\Omega_1$ 就相当于

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^j}-\frac{\partial a_j}{\partial x^i}=a_{ij},\qquad (2\cdot 2\cdot 16)$$

于是問題归結到要証明：在条件(2·2·15)之下，方程(2·2·16)在点 P 的某一邻域有解．我們还同时証明，当 a_{ij} 充分光滑地依賴于某些参数时，a_i 也充分光滑地依賴于这些参数．

現設所述的事項对 $n-1$ 个自变量的情形已成立，进而討論

維数为 n 的情况. 把 x^n 視为参数,依假定,必存在 $a_\alpha(x)$ ($\alpha=1, \cdots, n-1$),使满足

$$\frac{\partial a_\alpha}{\partial x^\beta}-\frac{\partial a_\beta}{\partial x^\alpha}=a_{\alpha\beta}. \qquad (2\cdot2\cdot17)$$

我們要再求作一个函数 a_n, 使能滿足(2·2·16)中除去(2·2·17)之外的一些方程,这就是

$$\frac{\partial a_n}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial a_\alpha}{\partial x^n}+a_{n\alpha}. \qquad (2\cdot2\cdot18)$$

由此得

$$\frac{\partial^2 a_n}{\partial x^\beta\partial x^\alpha}=\frac{\partial^2 a_\alpha}{\partial x^\beta\partial x^n}+\frac{\partial a_{n\alpha}}{\partial x^\beta}=\frac{\partial}{\partial x^n}\left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial x^\beta}\right)+\frac{\partial a_{n\alpha}}{\partial x^\beta}.$$

同理

$$\frac{\partial^2 a_n}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}=\frac{\partial}{\partial x^n}\left(\frac{\partial a_\beta}{\partial x^\alpha}\right)+\frac{\partial a_{n\beta}}{\partial x^\alpha}.$$

把二式相减,利用(2·2·17)及(2·2·15)式,就知道其差式恒等于零,这就說明解 a_n 存在,且若 a_{ij} 光滑地依賴于某些参数,a_n 也光滑地依賴于这些参数,这因为 a_n 能由全微分式

$$\left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial x^n}+a_{n\alpha}\right)dx^\alpha$$

通过曲綫积分(在单連通区域中和道路无关)得到. 所得到的 $a_1, \cdots, a_n$ 能滿足(2·2·16)式,这样就得到了所要証的事項.

§ 2·3 Pfaff 方程組. 完全可积性

設有 m 个 Pfaff 式 $\theta^\alpha(x, dx)$ ($\alpha=1, 2, \cdots, m$),作方程組

$$\theta^\alpha=a_i^\alpha(x)dx^i=0, \qquad (2\cdot3\cdot1)$$

称它为 Pfaff 方程組. 我們假定 θ^α 在区域 G 中的每点均为独立的,这就是說;对于每点 x, 均不存在不全为 0 的数組 b_α, 能使

$$b_\alpha\theta^\alpha=b_\alpha a_i^\alpha(x)dx^i=0 \qquad (2\cdot3\cdot2)$$

对所有的 dx^i 成立；这也就是說，矩陣 (a_i^α) 在每点的秩数均为 m.

如果函数 $F(x^1, \cdots, x^n)$ 满足下述条件：在每点 (x^i)，只要微分 dx^i 满足(2·3·1)，也就一定会成立

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x^i}dx^i=0, \tag{2·3·3}$$

那末，函数 F 就称为 Pfaff 方程組(2·3·1)的初积分．設 $F^1, \cdots, F^\sigma$ 为 (2·3·1) 在区域 G 的 σ 个初积分，容易看到 $\Phi(F^1, \cdots, F^\sigma)=\Theta(x^1, \cdots, x^n)$ 也是一个初积分，这因为

$$d\Phi=\frac{\partial \Phi}{\partial F^1}dF^1+\cdots+\frac{\partial \Phi}{\partial F^\sigma}dF^\sigma$$

的緣故．如果矩陣$\left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i}\right)$ $(\alpha=1, \cdots, \sigma;\ i=1, \cdots, n)$ 在区域 G_1 的每一点的秩数为 σ，則称它們为一組独立的初积分．依初积分的定义，如 F 为初积分，那末必有函数 b_α，使

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}=b_\alpha a_i^\alpha. \tag{2·3·4}$$

由于 (a_i^α) 的秩为 m，所以独立的初积分的个数也至多为 m.

我們引入定义：如果 Pfaff 方程組(2·3·1)在一区域 G_1 中有 m 个独立的初积分，那末就称它为完全可积的．

对完全可积的 Pfaff 方程組，設 $F^1, \cdots, F^m$ 为一組独立的初积分，如有其他的初积分 F^{m+1}，那末矩陣 $\left(\frac{\partial F^p}{\partial x^i}\right)$ $(p=1, \cdots, m+1)$ 的秩数仍为 m，而矩陣 $\left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i}\right)$ 的秩数也为 m. 由隐函数存在定理可知 F^{m+1} 必为 $F^1, \cdots, F^m$ 的函数．又依据(2·3·4)式，我們可知必存在函数組 $b_\beta^\alpha(x)$，使

$$\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i}=b_\beta^\alpha a_i^\beta, \quad \text{即}\quad dF^\alpha=b_\beta^\alpha\theta^\beta. \tag{2·3·5}$$

又 $m\times m$ 方陣 (b_β^α) 在每点均必为非异的，否則，$\left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i}\right)$ 的秩数

不会处处为 m. 現設 $(\tilde{b}^\alpha_\beta)$ 为 (b^α_β) 的逆陣，那末

$$a^\alpha_i = \tilde{b}^\alpha_\beta \frac{\partial F^\beta}{\partial x^i},$$

这就是說

$$\theta^\alpha = \tilde{b}^\alpha_\beta(x) dF^\beta, \tag{2·3·6}$$

于是得到

定理 1　完全可积 Pfaff 方程組中的每个 Pfaff 式均可表示为它的一組独立的初积分的全微分的綫性組合.

依(2·3·5)，(2·3·6)式，作

$$D\theta^\alpha = [d\tilde{b}^\alpha_\beta(x),\ dF^\beta] = [d\tilde{b}^\alpha_\beta(x),\ b^\beta_\gamma \theta^\gamma],$$

所以有

$$D\theta^\alpha = [\omega^\alpha_\beta,\ \theta^\beta], \tag{2·3·7}$$

这里

$$\omega^\alpha_\beta = \tilde{b}^\gamma_\beta d b^\alpha_\gamma.$$

我們得到

定理 2　如果 Pfaff 方程組(2·3·1)为完全可积，那末它的右边的外微分必可写成(2·3·7)式.

当(2·3·1)为完全可积时，由(2·3·7)式可知，如果任意两組微分均能使 θ^α 为 0，那末它們也能够使 $D\theta^\alpha$ 为 0，这事实往往說成为 $D\theta^\alpha=0$ 是 $\theta^\alpha=0$ 的"代数推論". 同时由 $D\theta^\alpha=0$ 为 $\theta^\alpha=0$ 的代数推論这一事实，也可推出(2·3·7)式. 事实上，我們除 θ^α 外，还可再选取 $n-m$ 个 Pfaff 式 $\theta^{m+1}, \cdots, \theta^n$，使 $\theta^1, \cdots, \theta^n$ 为独立的，因此，$D\theta^\alpha$ 可表示为

$$D\theta^\alpha = \frac{1}{2} a^\alpha_{\beta\gamma}[\theta^\beta,\ \theta^\gamma] + a^\alpha_{p\beta}[\theta^p,\ \theta^\beta] + \frac{1}{2} a^\alpha_{pq}[\theta^p,\ \theta^q]$$

$$(p = m+1, \cdots, n;\ a^\alpha_{\beta\gamma} = -a^\alpha_{\gamma\beta},\ a^\alpha_{pq} = -a^\alpha_{qp})$$

的形状. 我們可选取两組微分，使 $\theta^\alpha=0$ 而使 θ^p 取到任意两組

可能的值,依假設,我們有 $a^{\alpha}_{pq}[\theta^p, \theta^q]=0$ 对任意取的两組 θ^p 的数值均成立,所以有 $a^{\alpha}_{pq}=0$,而取

$$\omega^{\alpha}_{\gamma}=\frac{1}{2}a^{\alpha}_{\beta\gamma}\theta^{\beta}+a^{\alpha}_{p\gamma}\theta^{p},$$

我們就有

$$D\theta^{\alpha}=[\omega^{\alpha}_{\gamma}, \theta^{\gamma}]. \qquad (2\cdot3\cdot8)$$

这便是所要証明的.

注 如果 θ^{α} 滿足 (2·3·8) 式, 令 $\bar{\theta}^{\alpha}=b^{\alpha}_{\beta}\theta^{\beta}$, 式中 b^{α}_{β} 为任意的函数,又 $\det|b^{\alpha}_{\beta}|\neq0$,那末也存在 Pfaff 式 $\bar{\omega}^{\alpha}_{\gamma}$, 使

$$D\bar{\theta}^{\alpha}=[\bar{\omega}^{\alpha}_{\gamma}, \bar{\theta}^{\gamma}]. \qquad (2\cdot3\cdot9)$$

事实上,

$$D\bar{\theta}^{\alpha}=[db^{\alpha}_{\beta}, \theta^{\beta}]+b^{\alpha}_{\beta}[\omega^{\beta}_{\varepsilon}, \theta^{\varepsilon}],$$

如令

$$\bar{\omega}^{\alpha}_{\gamma}=(db^{\alpha}_{\beta})\tilde{b}^{\beta}_{\gamma}+b^{\alpha}_{\beta}\omega^{\beta}_{\varepsilon}\tilde{b}^{\varepsilon}_{\gamma},$$

式中的 $(\tilde{b}^{\beta}_{\gamma})$ 为 (b^{α}_{β}) 的逆陣,那末 (2·3·9) 式就成立.

我們現在要考察定理 2 的逆定理.

定理 3 如果对 θ^{α} 成立 (2·3·7) 式, 那末 Pfaff 方程組 (2·3·1) 为完全可积的. 更确切地說,对 G 的每点 P, 必有一邻域 G_1, 使在其中有 (2·3·1) 的 m 个独立的初积分.

首先我們考察 $m=n-1$ 的情形, 这时由方程 (2·3·1) 可唯一定出 $dx^1, \cdots, dx^n$ 之間的比值, 即存在不全为零的一組函数 $\lambda^1, \cdots, \lambda^n$, 使 (2·3·1) 等价于

$$\frac{dx^1}{\lambda^1}=\frac{dx^2}{\lambda^2}=\cdots=\frac{dx^n}{\lambda^n}. \qquad (2\cdot3\cdot10)$$

根据常微分方程組的理論, 这样的方程組在任一点 P 的适当邻域中恰有 $n-1$ 个独立的初积分. 所以定理对于 $m=n-1$ 或 $n-m=1$ 的情形成立.

現假設定理在 $m=n-(r-1)$ 时成立, 而考察 $m=n-r$ 的

情形．由于(2·3·1)的系数矩陣秩数为 m，我們不妨設

$$\det|a^\alpha_\beta|\neq 0,$$

否則也可以改变自变量的次序而做到这一点．作 $\theta^{m+1}=dx^{m+1}$，那末

$$D\theta^{m+1}=0. \tag{2·3·11}$$

对于方程組 $\theta^\alpha=0$，$\theta^{m+1}=0$ 而言，空間維数减去方程的个数为 $r-1$，而根据方程(2·3·7)和(2·3·11)及归納法的假定就知道，存在这一方程組的 $m+1$ 个独立的初积分 $F^1, F^2, \cdots, F^{m+1}$．又选取 $n-m-1$ 个任意函数 $F^{m+2},\cdots, F^n$，使这 n 个函数在点 P 的某一邻域中为函数独立，因此可令

$$\bar{x}^i=F^i(x^j)$$

为新的自变量．在这些自变量之下，我們可証

$$\theta^\alpha=\bar{a}^\alpha_\sigma(\bar{x}^\sigma, \bar{x}^p)d\bar{x}^\sigma$$

$$(\sigma=1, 2, \cdots, m+1;\ p=m+2, \cdots, n). \tag{2·3·12}$$

又設在(2·3·12)中 $\det|\bar{a}^\alpha_\beta|\neq 0$，方程 $\theta^\alpha=0$ 可以改写为

$$\bar{\theta}^\alpha=d\bar{x}^\alpha-f^\alpha(\bar{x}^\sigma, \bar{x}^p)d\bar{x}^{m+1}=0.$$

依定理 2 的附注，可知 $D\bar{\theta}^\alpha=0$ 也为 $\bar{\theta}^\alpha=0$ 的代数推論，但

$$D\bar{\theta}^\alpha=-\frac{\partial f^\alpha}{\partial\bar{x}^\sigma}[d\bar{x}^\sigma, d\bar{x}^{m+1}]-\frac{\partial f^\alpha}{\partial\bar{x}^p}[d\bar{x}^p, d\bar{x}^{m+1}].$$

置 $d\bar{x}^\alpha=f^\alpha(\bar{x}^\sigma, \bar{x}^p)d\bar{x}^{m+1}$，因为此时 $d\bar{x}^p$，$d\bar{x}^{m+1}$ 为任意，又 $D\bar{\theta}^\alpha$ 必須为 0，所以

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial\bar{x}^p}=0,$$

因此有

$$\bar{\theta}^\alpha=d\bar{x}^\alpha-f^\alpha(\bar{x}^\sigma)d\bar{x}^{m+1}=0.$$

这是由 $m+1$ 个变量的 m 个方程所成的 Pfaff 方程組，所以有 m 个独立的初积分 $F\sigma$，回到原来的 θ^α 和原来的坐标系統，我們就得到定理的証明．

n 維空間的一个 k 維曲面在每点的邻域均可表示为

$$x^i=f^i(u^1,\ \cdots,\ u^k),\qquad(2\cdot3\cdot13)$$

式中 f^i 为光滑的函数,且矩陣 $\left(\frac{\partial f^i}{\partial u^a}\right)(a=1,2,\cdots,k)$ 的秩为 k. 如果把 x^i 和相应的 dx^i 代入 Pfaff 方程(2·3·1), 就能使它关于 u^a 和 du^a 恒等地成立,那末就称这个曲面为 Pfaff 方程的**积分流形**. 特别,如 Pfaff 方程(2·3·1)为完全可积, 又 $F^1,\ \cdots,\ F^m$ 是它的一組独立的初积分,那末由

$$F^1=C^1,\ F^2=C^2,\ \cdots,\ F^m=C^m$$
$$(C^1,\ C^2,\ \cdots,\ C^m\ \text{常数})\qquad(2\cdot3\cdot14)$$

所代表的曲面一定是 Pfaff 方程的积分流形. 这因为,在这一曲面上的 x^i 和 dx^i 滿足

$$\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i}dx^i=0,$$

由它能使 $\theta^\alpha=0$. 对空間任一点 $(x_0^1,\ \cdots,\ x_0^n)$, 只要它在矩陣 $\left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i}\right)$ 的秩为 m 的范圍內,总可决定常数 C^α,使 $F^\alpha(x_0^1,\ \cdots,\ x_0^n)=C^\alpha$. 所以对完全可积的 Pfaff 方程,过每点必有一个 $n-m$ 維的积分流形. 相反地, 如果过每点都有 Pfaff 方程 $\theta^\alpha=0$ 的一个 $n-m$ 維的积分流形,不妨設 $\theta^\alpha=0$ 可写成

$$dx^\alpha-f_p^\alpha(x)dx^p=0\quad(p=m+1,\ \cdots,\ n).$$

設 $(0,\cdots,0)$ 为这方程的定义域內的点, 过点 $(x_0^1,\cdots,x_0^m,0,\cdots,0)$ 的积分流形上的点至少在这一点近旁由一些曲綫构成, 这些曲綫的方程滿足常微分方程

$$\frac{dx^\alpha}{dt}=f_p^\alpha(x)c^p,$$
$$\frac{dx^p}{dt}=c^p\qquad(2\cdot3\cdot15)$$

和初始条件 $t=0,\ x^\alpha=x_0^\alpha,\ x^p=0$, 于此 c^p 为参数. 当 c^p 充分

小时，这方程在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 有解，如果置 $c^\rho = x^\rho$，那末就得到过 $(x_0^1, \cdots, x_0^m, 0, \cdots, 0)$ 点的积分流形的方程：

$$x^\alpha = f^\alpha(x^\rho, x_0^\alpha). \qquad (2\cdot3\cdot16)$$

又当 $x^\rho = 0$ 时，$x^\alpha = x_0^\alpha$，f^α 为 x^ρ 及 x_0^α 的光滑的函数，而 $x^\rho = 0$ 时，$\dfrac{\partial f^\alpha}{\partial x_0^\beta} = \delta_\beta^\alpha$，所以在 $(x_0^\alpha, 0)$ 的邻域中，$\det\left|\dfrac{\partial f^\alpha}{\partial x_0^\beta}\right| \neq 0$，因而可解出 x_0^α，得

$$x_0^\alpha = F^\alpha(x^\beta, x^\rho),$$

而 $\det\left|\dfrac{\partial F^\alpha}{\partial x^\beta}\right| \neq 0$. 这些方程均代表积分流形，卽 $dF^\alpha = 0$ 和 $\theta^\alpha = 0$ 互为等价，所以 $F^\alpha(x^\beta, x^\rho)$ 为 m 个独立的初积分，卽 Pfaff 方程为完全可积，因此，还成立

定理 4　Pfaff 方程为完全可积的充要条件是过每点必有一个 $n-m$ 維的积分流形.

附带指出，定理 4 的証明过程中也給出了在完全可积的情形下的积分流形的作法(归結为一个常微分方程組的积分)．如果方程幷非完全可积，依这个方法也可作一些 $n-m$ 維流形，但不能保証它是积分流形.

此外，如 θ^α 的系数均为解析函数，当 $\theta^\alpha = 0$ 为完全可积时，积分流形的方程仍然由积分常微分方程(2·3·15)所得出，此时表示积分流形的方程为 x^ρ 和 x_0^α 的解析函数.

§ 2·4　Pfaff 系統的特征变量

設 $\theta^\alpha = a_i^\alpha(x)dx^i$ 为 n 个变量构成的 m 个 Pfaff 式，現在提出如下的問題：能否选擇一組 $(x^1, \cdots, x^n)$ 的函数，使它們的个数尽可能地少，且为函数独立的，但利用这些函数及其微分就能完全表达 θ^α．这个問題是可以完全解决的.

我們称 Pfaff 方程

$$\theta^\alpha=0,$$
$$\pi_i^\alpha\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i^\alpha}{\partial x^j}-\frac{\partial a_j^\alpha}{\partial x^i}\right)dx^j=0 \tag{2·4·1}$$

为 Pfaff 系統 $\{\theta^\alpha\}$ 的特征方程. 可以直接驗証,特征方程不因自变量的变换而发生实质上的变化. 事实上,当我們作自变量的变换 $\bar{x}^i=f^i(x)$ 时,

$$\theta^\alpha=a_i^\alpha(x)dx^i=\bar{a}_i^\alpha(\bar{x})d\bar{x}^i,$$

式中

$$\bar{a}_i^\alpha(\bar{x})=a_j^\alpha(x)\ \frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^i}.$$

特征方程中的 $\pi_i^\alpha=0$ 現取形式

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{a}_i^\alpha}{\partial\bar{x}^j}-\frac{\partial\bar{a}_j^\alpha}{\partial\bar{x}^i}\right)d\bar{x}^i=0, \tag{2·4·2}$$

但另一方面,可以直接計算到

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{a}_i^\alpha}{\partial\bar{x}^j}-\frac{\partial\bar{a}_j^\alpha}{\partial\bar{x}^i}\right)d\bar{x}^i=\frac{1}{2}\ \frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^j}\left(\frac{\partial a_i^\alpha}{\partial x^k}-\frac{\partial a_k^\alpha}{\partial x^i}\right)dx^i,$$

又因 $\det\left|\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}\right|\neq0$,所以(2·4·2)式和 $\pi_i^\alpha=0$ 等价.

成立如下的

定理 Pfaff 系統 $\{\theta^\alpha\}$ 的特征方程必为完全可积,且 $\{\theta^\alpha\}$ 可以用这个方程的初积分及其微分表达起来.

在証明这个定理之前,我們先証明

引理 設特征方程的左端 θ^α, π_i^α 可表示为变量 $y^1, \cdots, y^k$ 的微分 $dy^1, \cdots, dy^k$ 的綫性組合,这里的 $y^1,\cdots, y^k$ 为 $x^1,\cdots, x^n$ 的独立函数,那末 θ^α 必可表示为 $y^1, \cdots, y^k$ 的 Pfaff 式.

【証】 再引入 $n-k$ 个函数 $y^{k+1}(x), \cdots, y^n(x)$, 使所有的 $y^i(x)$ 为函数独立的. 以 $y^1, \cdots, y^n$ 为新的坐标,依假設

$$\theta^\alpha=b_s^\alpha(y)dy^s \quad (s=1, 2, \cdots, k), \tag{2·4·3}$$

由于 π_i^α 也可以是 dy^s 的組合,在 (y^i) 坐标下,这一性质也保留,

所以我們有

$$\left(\frac{\partial b_p^\alpha}{\partial y^i}-\frac{\partial b_i^\alpha}{\partial y^p}\right)=0 \quad (p=k+1, \cdots, n).$$

但依(2·4·3)显見 $b_p^\alpha=0$, 所以得到

$$\frac{\partial b_i^\alpha}{\partial y^p}=0,$$

引理証毕.

現轉入定理的証明.

設 $\omega^1=0,\cdots,\omega^\rho=0$ 为特征方程中的独立的方程. 如 $\rho=n$, 那末定理的結論显然已經成立. 如 $\rho=n-1$,这一系統也显然为完全可积. 設 $y^1,\cdots,y^{n-1}$ 为初积分,依引理, θ^α 可由 $y^1,\cdots,y^{n-1}$ (及其微分)来表示. 如果 $\rho<n-1$,选取 $\omega^{\rho+1}, \cdots, \omega^{n-1}$, 使 $\omega^1, \cdots, \omega^{n-1}$ 为独立的, 因此 $\omega^1=0, \cdots, \omega^{n-1}=0$ 为完全可积. 設其初积分为 $y^1, \cdots, y^{n-1}$,依引理, θ^α 可用 $y^1, \cdots, y^{n-1}$ 及其微分表示. θ^α 可看成为 $n-1$ 維空間的 Pfaff 式,如 $\rho=n-2$,则依剛才的討論, 已經可以得到所需的結論; 如 $\rho<n-2$, 那末继續利用所用的步驟,把 θ^α 表示为 $n-2$ 变量的 Pfaff 式,这样,在 $\rho=n-3$ 时問題也就可以解决. 如 $\rho<n-3$, 則继續依此步驟进行下去, 最后总会得到: θ^α 可用 $y^1,\cdots,y^\rho$ 及其微分表示,而 $y^1, y^2,\cdots,y^\rho$ 为 $\omega^1=0, \cdots, \omega^\rho=0$ 的初积分. 由此可見, 特征方程为完全可积,且 θ^α 可表示为它的初积分的 Pfaff 式.

要注意到,特征方程中独立方程的个数如为 ρ, 那末 θ^α 也就不能表示为少于 ρ 个变量的 Pfaff 式. 这因为, 如果 θ^α 可表示为 $z^1, \cdots, z^\lambda(\lambda\leqslant\rho)$ 的 Pfaff 式, 那末它的特征方程至多只有 λ 个独立方程. 因此 λ 只能等于 ρ.

这样就解决了本节开始时所提出的問題.

我們还要指出下面的事实: 設 θ^α, θ^p 为一些独立的 Pfaff

式，又

$$D\theta^\alpha = \frac{1}{2} a^\alpha_{\beta\gamma}[\theta^\beta, \theta^\gamma] + a^\alpha_{\beta p}[\theta^\beta, \theta^p], \tag{2·4·4}$$

那末 θ^α 的特征方程为

$$\theta^\alpha = 0, \quad a^\alpha_{\beta p}\theta^p = 0. \tag{2·4·5}$$

为此，我們注意到，依据 $D\theta^\alpha$ 的表达式就可以知道 Pfaff 方程 $\theta^\alpha = 0$ 为完全可积，因此，可置

$$\theta^\alpha = b^\alpha_\beta dy^\beta, \quad \det|b^\alpha_\beta| \neq 0.$$

又(2·4·4)可改写作

$$D\theta^\alpha = \frac{1}{2} b^\alpha_{\beta\gamma}[dy^\beta, dy^\gamma] + b^\alpha_{\beta p}[dy^\beta, \theta^p],$$

式中

$$b^\alpha_{\beta\gamma} = a^\alpha_{\delta\varepsilon} b^\delta_\beta b^\varepsilon_\gamma, \quad b^\alpha_{\beta p} = a^\alpha_{\gamma p} b^\gamma_\beta. \tag{2·4·6}$$

如記

$$\theta^p = b^p_\alpha dy^\alpha + b^p_q dy^q, \quad \det|b^p_q| \neq 0,$$

依定义可知，特征方程是

$$dy^\alpha = 0, \quad b^\alpha_{\beta p} b^p_q dy^q = 0. \tag{2·4·7}$$

显然，它就等价于(2·4·5)式.

§2·5 单个 Pfaff 式的规范形式

設已給一个 Pfaff 式

$$\theta = a_i(x) dx^i, \tag{2·5·1}$$

作它的特征方程．已如上节所証，特征方程必为完全可积，θ 可以特征方程的初积分来表示．如果特征方程中的独立方程个数为 ρ，那末 θ 可以用 ρ 个自变量来表示．这 ρ 个自变量称为 Pfaff 式 θ 的固有变量，ρ 称为 θ 的类数．由于固有变量的选取还不是唯一的，我們希望能选取到一組固有变量，使 Pfaff 式在局部范圍內化得尽可能簡单一些．对此討論的結果还表明：类数相同

的两个 Pfaff 式在局部范围必可以通过自变量(固有变量)的变换而相互轉化. 我們要証明

定理　当 $\rho=2k$ 时,必可选擇固有变量 $y^1, \cdots, y^{2k}$ 使

$$\theta=y^1dy^{k+1}+y^2dy^{k+2}+\cdots+y^kdy^{2k}; \qquad (2\cdot5\cdot2)$$

当 $\rho=2k+1$ 时,必可选擇固有变量 $y^0, y^1, \cdots, y^{2k}$ 使

$$\theta=dy^0+y^1dy^{k+1}+y^2dy^{k+2}+\cdots+y^kdy^{2k}. \qquad (2\cdot5\cdot3)$$

为証明这个定理,我們就假設 x^i 为 θ 的固有变量,記特征方程中的 $\pi_i=0$ 为

$$\pi_i=a_{ij}(x)dx^j=0,$$

π_i 中独立方程的个数卽为反称方陣 (a_{ij}) 的秩数,这秩数必为偶数[1)]. 因此当 $\rho=2k$ 时, (a_{ij})为满秩, 又 $\theta=0$ 为 $\pi_i=0$ 的推論, 当 $\rho=2k+1$ 时, (a_{ij})的秩必为 $2k$, $\theta=0$ 必不为 $\pi_i=0$ 的推論.

先証明,当 $\rho=2k+1$ 时, θ 可写成

$$\theta=dy^0+\theta_1(d), \qquad (2\cdot5\cdot4)$$

式中 $\theta_1(d)$ 是类数为 $2k$ 的 Pfaff 式. 这时(a_{ij})的秩数为 $2k$, 可选取函数 $\xi^0(x), \xi^1(x), \cdots, \xi^{2k}(x)$,使

$$a_{ij}\xi^j=0, \quad a_i\xi^i=1 \quad (i=0, 1, \cdots, 2k).$$

再設 $y^1, \cdots, y^{2k}$ 为完全可积的 Pfaff 系統 $\pi_i=0$ 的 $2k$ 个独立的初积分,沿着 $y^1=c^1, \cdots, y^{2k}=c^{2k}$ 再选取参数 y^0, 使满足

$$\frac{dx^i}{dy^0}=\xi^i(x),$$

那末 y^0 和 $y^1, \cdots, y^{2k}$ 可作为新的坐标,函

$$\theta=Y_1dy^1+\cdots+Y_{2k}dy^{2k}+Y_0dy^0.$$

但当 $dy^1=dy^2=\cdots=dy^{2k}=0$ 时,依 ξ^i 和 y^0 的作法可見 $\theta=dy^0$, 所以得 $Y_0=1$. 又因为,相应于坐标 y^α 所作的 π_i 中也不应包含微分 dy^0 (这由于 π_i 在坐标变换下的变化規則,見 § 2·4), 所以

1) 可利用 § 1·3 定理 2 的証明方法来驗証这一事实.

易見

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y^0}=0,\ \cdots,\ \frac{\partial Y_{2k}}{\partial y^0}=0.$$

因此 $Y_1dy^1+Y_2dy^2+\cdots+Y_{2k}dy^{2k}$ 为 $2k$ 个变量的 Pfaff 式．为使 θ 的类数为 $2k+1$，它的类数必为 $2k$，因此它可以取为 θ_1 而使(2·5·4)式成立．

再証明，当 $\rho=2k$ 时，θ 可写成

$$\theta=z\theta_1, \tag{2·5·5}$$

式中 θ_1 是类数为 $2k-1$ 的 Pfaff 式．

为此，記 $\theta=a_idx^i$，作方程

$$a_{ij}(x)\xi^j(x)=a_i(x). \tag{2·5·6}$$

由于(a_{ij})为满秩，所以 $\xi^j(x)$为唯一确定的，且由 a_i 不全为 0，故 ξ^i 不全为 0．設 $F^\alpha(x)$ 为微分方程組 $dx^1: dx^2: \cdots: dx^n=\xi^1: \xi^2: \cdots: \xi^n$ 的一組独立的初积分 $(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$．因为 a_{ij} 为反称的，所以 $a_i\xi^i=0$，因此由 $dF^\alpha=0$ 能推出 $\theta=0$．选取 F^n，使 $F^1,\ \cdots,\ F^n$ 为独立的函数，令 $u^i=F^i(x)$为新的自变量，則可記 $\theta=b_\alpha(u)du^\alpha$．又記

$$D\theta=\frac{1}{2}\,b_{ij}[du^i,\ du^j],$$

$$\bar{\xi}^i=\xi^j(x)\frac{\partial u^i}{\partial x^j},$$

那末就有 $\bar{\xi}^1=\cdots=\bar{\xi}^{n-1}=0$，且容易驗証（类似于頁40）：由(2·5·6)能推出 $b_{ij}\bar{\xi}^j=b_i$，因此得 $\bar{\xi}^n b_{\alpha n}=b_\alpha$，此即

$$\bar{\xi}^n\frac{\partial b_\alpha}{\partial u^n}=b_\alpha.$$

因此

$$b_\alpha=zh_\alpha(u^1,\ \cdots,\ u^{n-1})\quad \left(z=e^{\int\frac{1}{\bar{\xi}^n}du^n}\right).$$

令 $\theta_1=h_\alpha du^\alpha$，我們就得到 (2·5·5) 式，且 θ_1 的类数必須为

$2k-1$, 否則 θ 的类数不可能为 $2k$.

現在要用数学归納法得到定理的結論. 首先看到, 当 $\rho=1$ 时,

$$\theta=a(x)dx=dy,$$

只需取 $y=\int a(x)dx$ 就可以了. 当 $\rho=2$ 时, 利用剛才所証的事实, $\theta=z\theta_1=zdy$,所以定理当 $k=1$ 时为眞. 設定理当 $k=s$ 时为眞,考察 $\rho=2s+1$ 时的情形. 依剛才所証事实,

$$\theta=dy^0+\theta_1,$$

θ_1 的类数为 $2s$, 因此,依数学归納法假設得

$$\theta=dy+y^1dy^{s+1}+\cdots+y^sdy^{2s}.$$

又如 $\rho=2s+2$,則

$$\theta=z\theta_1=z(dy^0+y^1dy^{s+1}+\cdots+y^sdy^{2s}).$$

令 z, zy^1, $\cdots$, zy^s 为新的变量, 我們就得到 θ 为所要証的形式. 定理証毕.

由这个定理可以見到,在小范圍內研究 Pfaff 式时, 只要研究它的規范形式就可以了.

推論 如二次外微分形式 Ω 满足

$$D\Omega=0, \tag{2·5·7}$$

那末必可选取适当的坐标系統,使

$$\Omega=[dy^1, dy^{s+1}]+\cdots+[dy^s, dy^{2s}] \tag{2·5·8}$$

成立.

【証】 依据 Poincaré 定理的逆定理可知, $\Omega=D\theta$, 于此 θ 为一 Pfaff 式. 把这 Pfaff 式化为规范形状,再外微分我們就会得到(2·5·8)式.

最后还要指出,如果所有用到的函数都只限于解析函数(实变量的或复变量的),本章中的一切結果都能够成立.

第三章 局部李群的基本定理

§3·1 局部李群．第一基本定理

在开始研究齐性空間微分几何学之前，我們必須掌握有关李群的基本知識．由于本书的目的是从局部的观点来討論齐性空間的，因而所需要的也只是局部李群的一些基本知識，局部李群和李群的联系，讀者可参閱本书的附录．我們参照 Cartan E. 的想法，用 Pfaff 式作为主要的工具来描述出局部李群的一些古典的結果(Cartan E. [4])．

設 G 为 r 个实变数的空間$(x^1, \cdots, x^r)$中的一个区域，e 为 G 中的一点．函数

$$z^\alpha=\varphi^\alpha(x^\beta,\ y^\gamma) \tag{3·1·1}$$

当 x: $(x^1, \cdots, x^r)\in G$, y: $(y^1, \cdots, y^r)\in G$, 并属于点 e 的某一个邻域中时有定义，又 z: $(z^1,\cdots,z^r)$ 也属于 G．我們称在集合 G 上局部地定义了乘法运算，并用

$$z=xy$$

来記它．如果

（i）成立結合律，即当 $(xy)z$ 和 $x(yz)$ 均有意义时，必有

$$(xy)z=x(yz)\,; \tag{3·1·2}$$

(ii) e 为单位元素,即

$$ex=xe=x \tag{3·1·3}$$

对任何 $x\in G$ 成立;

(iii) $\varphi^\alpha(x^\beta, y^\gamma)$ 是 x^β, y^γ 的解析函数,

那末我們就称 G 为一局部李群,称 e 为 G 的单位元素.

不妨設点 e 的坐标为$(0, \cdots, 0)$, (3·1·2)等价于

$$\varphi^\alpha(\varphi^\beta(x^\gamma, y^\delta), z^\varepsilon)=\varphi^\alpha(x^\gamma, \varphi^\beta(y^\delta, z^\varepsilon)), \tag{3·1·4}$$

(3·1·3)等价于

$$x^\alpha=\varphi^\alpha(0, x^\beta)=\varphi^\alpha(x^\beta, 0). \tag{3·1·5}$$

我們考察方程

$$0=\varphi^\alpha(x^\beta, y^\gamma), \tag{3·1·6}$$

当 $x^\beta=0$ 时,依(3·1·5)式可知,它必有解 $y^\gamma=0$. 又依此式可知,在 $x^\beta=0$, $y^\gamma=0$ 时,

$$\det\left|\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial y^\gamma}\right|=1,$$

所以存在 e 的一个邻域,在其中方程(3·1·6)有唯一的解

$$y^\gamma=\psi^\gamma(x^\beta), \tag{3·1·7}$$

使能成立 $\psi^\gamma(0)=0$, 并有

$$\varphi^\alpha(x^\beta, \psi^\gamma(x^\delta))=0, \tag{3·1·8}$$

这里的 ψ^γ 为 x^β 的解析函数. y^γ 所代表的元素称为 x 的逆元素,常用 x^{-1} 来記它. 由于

$$x^\lambda=\varphi^\lambda(\varphi^\alpha(x^\beta, \psi^\gamma(x^\delta)), x^\varepsilon)=\varphi^\lambda(x^\beta, \varphi^\alpha(\psi^\gamma(x^\beta), x^\varepsilon)),$$

而当 y, z 充分小时, 方程 $z^\lambda=\varphi^\lambda(y, x)$ 关于 x 在 e 的适当邻域中只有唯一的解,所以

$$\varphi^\alpha(\psi^\gamma(x^\delta), x^\varepsilon)=0 \tag{3·1·9}$$

当 x 在 e 的一个适当邻域中时成立, (3·1·8)和(3·1·9)也就是

$$x^{-1}x=xx^{-1}=e.$$

局部李群常常是作为整体李群的单位元素的一个坐标邻域而出现的，因此它往往不满足抽象群的一切条件，但它可以刻划李群的局部性质．为用語簡便計，我們在后文中所提到的群往往是指局部群而言．

我們要建立局部李群的第一基本定理．把群的乘法关系(3·1·1)依 x 的冪級数展开，利用(3·1·5)我們得到

$$z^{\alpha}=y^{\alpha}+a_{\beta}^{\alpha}(y)x^{\beta}+\cdots, \qquad (3\cdot1\cdot10)$$

这里的 $a_{\beta}^{\alpha}(y)$ 为 y 在 e 近旁的解析函数，未写出的項关于 x 至少是二次的．由(3·1·5)还可知

$$a_{\beta}^{\alpha}(0)=\delta_{\beta}^{\alpha}. \qquad (3\cdot1\cdot11)$$

設 h 为 G 中在 e 近旁的任意元素，令

$$\tilde{y}^{\alpha}=\varphi^{\alpha}(y, h),$$

于是

$$\varphi^{\alpha}(x, \varphi(y, h))=\varphi^{\alpha}(y, h)+a_{\beta}^{\alpha}(\varphi(y, h))x^{\beta}+\cdots. \qquad (3\cdot1\cdot12)$$

另一方面，依(3·1·4)式，

$$\begin{aligned}\varphi^{\alpha}(x, \varphi(y, h))&=\varphi^{\alpha}(\varphi(x, y), h)\\&=\varphi^{\alpha}(y^{\beta}+a_{\gamma}^{\beta}(y)x^{\gamma}+\cdots, h^{\beta}),\end{aligned}$$

所以有

$$\varphi^{\alpha}(y, h)+a_{\beta}^{\alpha}(\varphi(y, h))x^{\beta}+\cdots=\varphi^{\alpha}(y^{\beta}+a_{\gamma}^{\beta}(y)x^{\gamma}+\cdots, h^{\beta}).$$

把这式子两边关于 x^{β} 微分，并令 $x^{\beta}=0$，又把 y 改为 x，h 改为 y，我們得

$$a_{\beta}^{\alpha}(\varphi(x, y))=\frac{\partial\varphi^{\alpha}(x, y)}{\partial x^{\gamma}}a_{\beta}^{\gamma}(x). \qquad (3\cdot1\cdot13)$$

依据(3·1·11)式，矩陣 $(a_{\beta}^{\alpha}(y))$ 在 e 的一个邻域中是可逆的，令其逆陣为 $(\tilde{a}_{\beta}^{\alpha}(y))$，又置

$$\tilde{\omega}^{\alpha}(x, dx)=\tilde{a}_{\beta}^{\alpha}(x)dx^{\beta}, \qquad (3\cdot1\cdot14)$$

那末(3·1·5)，(3·1·13)表明：$\bar{x}^\alpha=\varphi^\alpha(x, y)$ 是 Pfaff 方程

$$\tilde{\omega}^\alpha(\bar{x}, d\bar{x})=\tilde{\omega}^\alpha(x, dx) \qquad (3·1·15)$$

以 $x^\alpha=0$, $\bar{x}^\alpha=y^\alpha$ 为初始条件的解．因为 y^α 为任意的，所以由此可以推出方程(3·1·15)为完全可积．

相反地，如有一系解析系数的 Pfaff 式 $\tilde{\omega}^\alpha(x, dx)$，它們在点 $(0, \cdots, 0)$ 的一个邻域中为独立的(即 $\det|\tilde{a}^\alpha_\beta(0)|\neq 0$)，又 Pfaff 方程組(3·1·15)为完全可积，而 $\bar{x}^\alpha=\varphi^\alpha(x, y)$ 为滿足初始条件 $\varphi^\alpha(0, y)=y^\alpha$ 的解，那末 $\varphi^\alpha(x, y)$ 能够作为一个局部李群的乘法关系．事实上，我們考察函数

$$\bar{\bar{x}}^\alpha=\varphi^\alpha(\varphi(x, y), z),$$

它滿足方程

$$\tilde{\omega}^\alpha(\bar{\bar{x}}, d\bar{\bar{x}})=\tilde{\omega}^\alpha(\varphi(x, y), d\varphi(x, y))=\tilde{\omega}^\alpha(x, dx)$$

和初始条件 $x^\alpha=0$, $\bar{\bar{x}}^\alpha=\varphi^\alpha(y, z)$，这就是

$$\varphi^\alpha(\varphi(x, y), z)=\varphi^\alpha(x, \varphi(y, z)),$$

所以以 $\varphi^\alpha(x, y)$ 所定义的乘法运算滿足結合律．因为 $\tilde{\omega}(x, dx)$ 为解析系数的，所以 φ^α 关于 x, y 均为解析的．此外，利用初始条件显然有

$$\varphi^\alpha(0, x)=x^\alpha,$$

局部李群的条件已經滿足．

这样，我們便証明了

定理 1　設 G 为 r 参数的局部李群，則存在 r 个独立的、具解析系数的 Pfaff 式 $\tilde{\omega}^\alpha(x, dx)$，使具性质：

(i) Pfaff 方程組

$$\tilde{\omega}^\alpha(\bar{x}, d\bar{x})=\tilde{\omega}^\alpha(x, dx) \qquad (3·1·15)$$

完全可积．

(ii) 以 $x^\alpha=0$, $\bar{x}^\alpha=y^\alpha$ 为初始条件的解

$$\bar{x}^\alpha=\varphi^\alpha(x, y)$$

即为群的乘法关系．又其逆也成立，即：如有具解析系数的 r 个独立的 Pfaff 式 $\breve{\omega}^\alpha(x,dx)$，其相应的 Pfaff 方程(3·1·15)为完全可积，那末依初始条件(ii)所作的函数 $\varphi^\alpha(x, y)$ 可作为一个局部李群的乘法关系．

这个定理常称为局部李群的第一基本定理．

注　在証明定理的第一部分时，我們有 $\tilde{a}^\alpha_\beta(0)=\delta^\alpha_\beta$，但在証明逆定理时，沒有这个限制．实际上，这个限制并非必要，这因为，我們如以

$$\theta^\alpha = c^\alpha_\beta \breve{\omega}^\beta$$

来代替 $\breve{\omega}^\alpha$（这里 c^α_β 为常数，$\det|c^\alpha_\beta|\neq 0$），性质(i)，(ii)仍然会保留．如果我們限定每个 Pfaff 式依数量的变化規則来变的話[1]，$\tilde{a}^\alpha_\beta(0)=\delta^\alpha_\beta$ 的性质在坐标变換下可能受到破坏，但是，如果規定 $\breve{\omega}^\alpha$ 在坐标变換下依在 e: (0, …, 0) 点的反变向量一样地变化[2]，那末这种特殊的 $\breve{\omega}^\alpha(x, dx)$ 就能保住它的特点．我們通称滿足定理 1 中的条件的 r 个独立的 Pfaff 式組为群的第一类不变形式的完全系，如再要求 $\tilde{a}^\alpha_\beta(0)=\delta^\alpha_\beta$，就称它为規范的．由第一类不变 Pfaff 式系中的 Pfaff 式常系数綫性組合所得的 Pfaff 式通称为群的第一类不变 Pfaff 式．另外，我們还注意到如果規定 $\breve{\omega}^\alpha(x, dx)$ 在坐标变換下依数量的規律来变，那末在坐标系統 $\bar{x}^i$ 下 $\bar{\tilde{a}}^\alpha_\beta(0)=\tilde{a}^\alpha_\gamma(0)c^\gamma_\beta$，于此 c^γ_β 为 $\dfrac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\beta}$ 在 $x^\gamma=0$ 时的数值，所以，可选取适当的坐标系統，使已給的一組 $\breve{\omega}^\alpha(x, dx)$ 化为規范的．

規范的第一类不变 Pfaff 式还有如下意义：由(3·1·10)可知

$$\varphi^\alpha(\breve{\omega}(y, dy), y) = y^\alpha - a^\alpha_\beta(y)\tilde{a}^\beta_\gamma(y)dy^\gamma + \cdots \doteq y^\alpha - dy^\alpha,$$

式中“$\doteq$”記不計 dy 的二阶以上无穷小时的相等关系．由此得

$$\breve{\omega}(y, dy) \doteq (y-dy)\cdot y^{-1}, \qquad (3\cdot1\cdot16)$$

---

[1] 即在坐标变換 $\bar{x}^\alpha=\bar{x}^\alpha(x)$ 下，成立 $\bar{\breve{\omega}}^\alpha(\bar{x}, d\bar{x})=\breve{\omega}^\alpha(x, dx)$．

[2] 即在坐标变換 $\bar{x}^\alpha=\bar{x}^\alpha(x)$ 下，成立 $\bar{\breve{\omega}}^\alpha(\bar{x},d\bar{x})=\tilde{c}^\alpha_\beta\breve{\omega}^\beta(x,dx)$ 而 $\tilde{c}^\alpha_\beta=\left(\dfrac{\partial\bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta}\right)_{x^\beta=0}$．

这式子的意义是：元素 $y-dy$ 乘以元素 y^{-1} 后所得的元素的坐标在一阶无穷小范圍內为 $\breve{\omega}^{\alpha}(y, dy)$，同样，也有

$$\breve{\omega}(y, dy) \doteq y \cdot (y+dy)^{-1}.$$

最后，我們对坐标变换稍加說明．一組充分光滑的函数 $\bar{x}^{\alpha}=f^{\alpha}(x^{\beta})$ 只要 $\det\left|\frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right|$ 在 $x^{\beta}=0$ 时不为 0，都可以用来作为群 G 的局部坐标，特别当 $f^{\alpha}(x^{\beta})$ 为解析函数时，我們称 $(\bar{x})$ 为解析坐标．又 (x) 自身也为解析坐标．在解析坐标下，乘法关系也保持为解析的，又 $\breve{\omega}^{\alpha}(x, dx)$ 的系数也能保持为解析．

§ 3·2　第二基本定理，第三基本定理

設 $\breve{\omega}^{\alpha}$ 为局部李群 G 的第一类不变形式的完全系，由于方程(3·1·15)即

$$\breve{\omega}^{\alpha}(\bar{x}, d\bar{x})=\breve{\omega}^{\alpha}(x, dx) \tag{3·2·1}$$

为完全可积的，所以

$$D\breve{\omega}^{\alpha}(\bar{x}, d\bar{x})=D\breve{\omega}^{\alpha}(x, dx) \tag{3·2·2}$$

应为(3·2·1)式的代数推論．如記

$$D\breve{\omega}^{\alpha}(x, dx)=\frac{1}{2} c^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)\,[\breve{\omega}^{\beta}, \breve{\omega}^{\gamma}]$$

$$(c^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)=-c^{\alpha}_{\gamma\beta}(x)), \tag{3·2·3}$$

那末由(3·2·2)，(3·2·1)就推出

$$\{c^{\alpha}_{\beta\gamma}(\bar{x})-c^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)\}\,[\breve{\omega}^{\beta}, \breve{\omega}^{\gamma}]=0 \tag{3·2·4}$$

对任何的 $\bar{x}$, x, d_1x, d_2x 成立．置 $x^{\alpha}=0$，取 $\bar{x}^{\alpha}$ 为任意数值，并記为 x^{α}，又因 d_1x, d_2x 可取为任意的两組微分，而 ω^{β} 为 r 个独立的 Pfaff 式，并且 $c^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 关于下标为反称，所以由(3·2·4)就能推出

$$c^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)=c^{\alpha}_{\beta\gamma}(0).$$

这表示，$c^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)$ 实际上和 x 无关，是一組常数．所以(3·2·3)就

可写成

$$D\tilde{\omega}^\alpha=\frac{1}{2}c^\alpha_{\beta\gamma}[\tilde{\omega}^\beta,\ \tilde{\omega}^\gamma]\quad (c^\alpha_{\beta\gamma}=-c^\alpha_{\gamma\beta}). \qquad (3\cdot2\cdot5)$$

这一方程称为 Cartan-Maurer 方程，常数 $c^\alpha_{\beta\gamma}$ 称为群的結构常数．再对(3·2·5)进行外微分，利用 Poincaré 定理，左边的外微分为 0，在右边的外微分中，再应用(3·2·5)式本身进行化简，就会得到

$$(c^\alpha_{\delta\gamma}c^\delta_{\varepsilon\lambda}+c^\alpha_{\delta\varepsilon}c^\delta_{\lambda\gamma}+c^\alpha_{\delta\lambda}c^\delta_{\gamma\varepsilon})[\tilde{\omega}^\gamma,\ \tilde{\omega}^\varepsilon,\ \tilde{\omega}^\lambda]=0. \qquad (3\cdot2\cdot6)$$

因为 $\tilde{\omega}^\alpha$ 为 r 个独立的 Pfaff 式，且(3·2·6)的系数关于指标 γ, ε, λ 有反称性，所以从此推出結构常数所应满足的式子

$$c^\alpha_{\delta\gamma}c^\delta_{\varepsilon\lambda}+c^\alpha_{\delta\varepsilon}c^\delta_{\lambda\gamma}+c^\alpha_{\delta\lambda}c^\delta_{\gamma\varepsilon}=0. \qquad (3\cdot2\cdot7)$$

这式子常称为 Jacobi 恒等式．

归結上述結果，我們得

定理 1（第二基本定理） 設 $\tilde{\omega}^\alpha$ 为群的第一类不变形式的完全系，那末就成立 Cartan-Maurer 方程(3·2·5)，右边的系数 $c^\alpha_{\beta\gamma}$ 关于下标反称，且满足 Jacobi 恒等式(3·2·7)．

現在考虑一个反面的問題：設已給常数組 $c^\alpha_{\beta\gamma}$，关于 β, γ 为反称，又能满足 Jacobi 恒等式，間是否存在一局部李群，它以 $c^\alpha_{\beta\gamma}$ 为結构常数．事实上，我們有

定理 2（第三基本定理） 設 $c^\alpha_{\beta\gamma}$ 为一組已給的常数，关于下标反称，又满足 Jacobi 恒等式，那末必存在一个局部李群，以 $c^\alpha_{\beta\gamma}$ 为結构常数．

根据第一基本定理，只要求得一組独立的 Pfaff 式 $\tilde{\omega}^\alpha=A^\alpha_\beta(x^\gamma)dx^\beta$，使 $A^\alpha_\beta(x^\gamma)$ 为解析函数，又满足 Cartan-Maurer 方程就可以了．据此，我們得到一个偏微分方程組

$$\frac{\partial A^\alpha_\beta}{\partial x^\gamma}-\frac{\partial A^\alpha_\gamma}{\partial x^\beta}=-c^\alpha_{\delta\varepsilon}A^\delta_\beta A^\varepsilon_\gamma, \qquad (3\cdot2\cdot8)$$

需要求的是这个方程組的解析解，且应满足 $\det|A^\alpha_\beta|\neq0$．我們

考察常微分方程組

$$\frac{d\theta^\alpha_\beta}{dt}=\delta^\alpha_\beta-c^\alpha_{\delta\varepsilon}\theta^\delta_\beta e^\varepsilon \tag{3·2·9}$$

和初始条件

$$t=0,\quad \theta^\alpha_\beta=0, \tag{3·2·10}$$

式中的 e^ε 为一組参数．如所知，如果 e^ε 取在 $(0,\cdots,0)$ 的某一邻域内，就可以保証方程(3·2·9)在初始条件(3·2·10)下有在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 中均为解析的解．解还依賴于 e^ε，且为它的解析函数，故可記为

$$\theta^\alpha_\beta=\varphi^\alpha_\beta(t,\ e^1,\ \cdots,\ e^r). \tag{3·2·11}$$

如置

$$A^\alpha_\beta(x)=\theta^\alpha_\beta(1,\ x^1,\ \cdots,\ x^r), \tag{3·2·12}$$

那末 A^α_β 为 x^r 的解析函数．我們要証，这組函数就滿足偏微分方程(3·2·8)，且当 x^γ 充分接近于 0 时，的确有 $\det|A^\alpha_\beta|\neq 0$．事实上，把(3·2·11)代入(3·2·9)式，并把它关于 e^γ 微分，我們得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi^\alpha_\beta}{\partial e^\gamma}\right)=-c^\alpha_{\delta\varepsilon}\frac{\partial\varphi^\delta_\beta}{\partial e^\gamma}e^\varepsilon-c^\alpha_{\delta\gamma}\varphi^\delta_\beta;$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(c^\alpha_{\delta\varepsilon}\varphi^\delta_\beta\varphi^\varepsilon_\gamma)&=c^\alpha_{\beta\varepsilon}\varphi^\varepsilon_\gamma+c^\alpha_{\delta\gamma}\varphi^\delta_\beta-c^\alpha_{\delta\varepsilon}c^\delta_{\lambda\mu}e^\mu\varphi^\lambda_\beta\varphi^\varepsilon_\gamma-c^\alpha_{\delta\varepsilon}c^\varepsilon_{\lambda\mu}e^\mu\varphi^\lambda_\gamma\varphi^\delta_\beta\\&=c^\alpha_{\beta\varepsilon}\varphi^\varepsilon_\gamma+c^\alpha_{\delta\gamma}\varphi^\delta_\beta-e^\mu\varphi^\delta_\beta\varphi^\varepsilon_\gamma(c^\alpha_{\lambda\varepsilon}c^\lambda_{\delta\mu}+c^\alpha_{\delta\lambda}c^\lambda_{\varepsilon\mu}),\end{aligned}$$

利用 Jacobi 恒等式就有

$$\frac{d}{dt}(c^\alpha_{\delta\varepsilon}\varphi^\delta_\beta\varphi^\varepsilon_\gamma)=c^\alpha_{\beta\varepsilon}\varphi^\varepsilon_\gamma+c^\alpha_{\delta\gamma}\varphi^\delta_\beta+e^\mu\varphi^\delta_\beta\varphi^\varepsilon_\gamma c^\alpha_{\mu\lambda}c^\lambda_{\delta\varepsilon},$$

因而

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi^\alpha_\beta}{\partial e^\gamma}-\frac{\partial\varphi^\alpha_\gamma}{\partial e^\beta}+c^\alpha_{\delta\varepsilon}\varphi^\delta_\beta\varphi^\varepsilon_\gamma\right)\\&\qquad=-e^\varepsilon c^\alpha_{\delta\varepsilon}\left(\frac{\partial\varphi^\delta_\beta}{\partial e^\gamma}-\frac{\partial\varphi^\delta_\gamma}{\partial e^\beta}+c^\delta_{\lambda\mu}\varphi^\lambda_\beta\varphi^\mu_\gamma\right).\end{aligned} \tag{3·2·13}$$

且 $t=0$ 时成立 $\varphi^{\alpha}_{\beta}=0$，所以也有

$$\frac{\partial\varphi^{\alpha}_{\beta}}{\partial e^{\gamma}}=0.$$

因此，$t=0$ 时成立

$$\frac{\partial\varphi^{\alpha}_{\beta}}{\partial e^{\gamma}}-\frac{\partial\varphi^{\alpha}_{\gamma}}{\partial e^{\beta}}+c^{\alpha}_{\delta\varepsilon}\varphi^{\delta}_{\beta}\varphi^{\varepsilon}_{\gamma}=0.$$

(3·2·13) 可以看成为一个綫性的常微分方程組，根据 Cauchy 問題解的唯一性定理，就得到

$$\frac{\partial\varphi^{\alpha}_{\beta}}{\partial e^{\gamma}}-\frac{\partial\varphi^{\alpha}_{\gamma}}{\partial e^{\beta}}+c^{\alpha}_{\delta\varepsilon}\varphi^{\delta}_{\beta}\varphi^{\varepsilon}_{\gamma}=0$$

处处成立，特别令 $t=1$，就得到(3·2·8)式. 又当 $e^{\gamma}=0$ 时成立

$$\varphi^{\alpha}_{\beta}=A^{\alpha}_{\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta},$$

所以当 x 充分小时有 $\det|A^{\alpha}_{\beta}|\neq 0$. 这样就証明了所需要的全部断語. 定理 2 証毕.

为了进一步說明結构常数对于局部李群所起的决定性作用起見，我們先引入

定义 两个 r 維的局部李群 G_1, G_2 之間如有映象

$$Tx_1=x_2 \quad (x_1\in G_1,\ x_2\in G_2),$$

它滿足下述性質：

(i) T 的定义域在 G_1 的单位元素 e_1 的一个充分小的邻域中，T 的值域在 G_2 的单位元素 e_2 的一个充分小的邻域中；

(ii) 当 G_1, G_2 各取解析坐标时，如把 T 表示为方程

$$\bar{x}^{\alpha}=\varphi^{\alpha}(x^{\beta}),$$

φ 为解析函数，且 $\det\left|\dfrac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right|\neq 0$；

(iii) 成立关系式

$$(Tx_1)(Tx_2)=T(x_1x_2),$$

那末 T 称为局部李群 G_1 和 G_2 之間的一个同构. 由(ii)可知在

(0, …, 0)的适当邻域中对应必为一对一的. 如果局部李群 G_1 和 G_2 之間存在一个同构 T，那末就称它們是同构的[1].

和普通的群的同构一样，根据定义我們能够推出

$$Te_1=e_2,\quad T(x_1^{-1})=(Tx_1)^{-1}.$$

我們有

定理 3 具相同的結构常数的两个 r 維局部李群必同构.

【証】 依假設这两个局部李群各有第一类的不变形式完全系 $\breve{\omega}^\alpha(x, dx)$ 和 $\breve{\Omega}^\alpha(\bar{x}, d\bar{x})$，使成立

$$\left.\begin{aligned} D\breve{\omega}^\alpha(x, dx)&=\frac{1}{2}c^\alpha_{\beta\gamma}[\breve{\omega}^\beta, \breve{\omega}^\gamma],\\ D\breve{\Omega}^\alpha(\bar{x}, d\bar{x})&=\frac{1}{2}c^\alpha_{\beta\gamma}[\breve{\Omega}^\beta, \breve{\Omega}^\gamma].\end{aligned}\right\}\tag{3·2·14}$$

作 Pfaff 方程

$$\breve{\Omega}^\alpha(\bar{x}, d\bar{x})=\breve{\omega}^\alpha(x, dx),\tag{3·2·15}$$

依据(3·2·14)可知它为完全可积的，以 $x^\alpha=0$, $\bar{x}^\alpha=0$ 为初始条件(这里設两群的单位元素的坐标都是(0, …, 0))，我們会得到解析解

$$\bar{x}^\alpha=\bar{x}^\alpha(x).\tag{3·2·16}$$

由于 $\breve{\Omega}^\alpha$, $\breve{\omega}^\alpha$ 均为独立的 Pfaff 式，如果在(0, …, 0)点 $\breve{\Omega}^\alpha$ 的系数为 $\underset{2}{\tilde{A}}{}^\alpha_\beta(0)$，$\breve{\omega}^\alpha$ 的系数为 $\underset{1}{\tilde{A}}{}^\alpha_\beta(0)$，那末由方程本身可見

$$\left.\frac{\partial\bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta}\right|_{x^\alpha=0}=\underset{2}{A}{}^\alpha_\gamma(0)\underset{1}{\tilde{A}}{}^\gamma_\beta(0),$$

式中的 $\underset{2}{A}{}^\alpha_\gamma(0)$ 为方陣$(\underset{2}{\tilde{A}}{}^\alpha_\beta(0))$的逆陣中的元素，因此

$$\det\left|\frac{\partial\bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta}\right|\neq 0$$

在(0, …, 0)的一个邻域中成立. 所以，如依(3·2·16)作群 G_2

---

[1] 这里的同构概指解析的同构，且为局部同构(見附录). 因为所論的为局部李群，用同构二字不会引起誤解.

的坐标变換，那末群 G_2 的第一类不变形式系就化为

$$\breve{\Omega}^{\alpha}(\bar{x}(x),\ d\bar{x}(x)) = \breve{\omega}^{\alpha}(x,\ dx), \qquad (3\cdot2\cdot17)$$

因此，在这一坐标系下，G_2 的乘法关系和 G_1 的乘法关系相同，所以，如果我們把具同一坐标的元素作为群 G_1 和 G_2 的对应元素，那末这个对应就是一个同构．所以群 G_1 和 G_2 是同构的．証毕．

由此可見，結构常数除同构外完全刻划了局部李群的性質，但我們还应指出，在群的不变形式系 $\breve{\omega}^{\alpha}$ 作了变換

$$\breve{\theta}^{\alpha} = c^{\alpha}_{\beta}\breve{\omega}^{\beta}, \quad \det|c^{\alpha}_{\beta}| \neq 0 \qquad (3\cdot2\cdot18)$$

之后，結构常数也应有变換

$$\bar{c}^{\alpha}_{\beta\gamma} = c^{\alpha}_{\lambda}c^{\lambda}_{\mu\nu}\tilde{c}^{\mu}_{\beta}\tilde{c}^{\nu}_{\gamma}, \qquad (3\cdot2\cdot19)$$

式中 $\tilde{c}^{\mu}_{\beta}$ 为(c^{λ}_{μ})的逆陣中的元素，因此定理 3 可拓广为

定理 3′ 設两个 r 維的局部李群的結构常数之間满足关系式(3·2·19)，那末这两个局部李群一定同构．

附带指出，在定义局部李群 G 时，我們保留其他的要求，但只假定乘法关系式有連續的三阶导数，那末照样可以作出 $\breve{\omega}^{\alpha}(x,\ dx)$ 和 $c^{\alpha}_{\beta\gamma}$，但 $\breve{\omega}^{\alpha}(x,\ dx)$ 的系数只能有連續的二阶的导数，但由 $c^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 依定理 2 的方法决定出一組具解析系数的 $\breve{\Omega}^{\alpha}(\bar{x},\ d\bar{x})$，再利用完全可积的方程組

$$\breve{\Omega}^{\alpha}(\bar{x},\ d\bar{x}) = \breve{\omega}^{\alpha}(x,\ dx)$$

可决定 G 的一个坐标系統 $(\bar{x})$，在其上的乘法关系依此坐标系統来說是解析的．这事实也可以說成为：如把局部李群的乘法关系的解析性要求降低为一定的光滑性，那末我們实质上沒有得到新的对象，只要适当选擇坐标变換，仍回复到满足原来的定义的局部李群．

§3·3 李群的第二类不变 Pfaff 式

如果把局部李群的乘法关系展开为

$$\varphi^\alpha(y,\ x)=y^\alpha+b^\alpha_\beta(x)y^\beta+\cdots, \tag{3·3·1}$$

作(b^α_β)的逆陣$(\tilde{b}^\alpha_\beta)$，令

$$\omega^\alpha(x,\ dx)=\tilde{b}^\alpha_\beta(x)dx^\beta, \tag{3·3·2}$$

我們照样可以得到

（i）$\omega^\alpha(x,\ dx)$为具解析系数的独立的 Pfaff 式;

（ii）Pfaff 方程組

$$\omega^\alpha(\bar{x},\ d\bar{x})=\omega^\alpha(x,\ dx)$$

为完全可积，依初始条件 $x^\alpha=0,\ \bar{x}^\alpha=y^\alpha$ 的解为乘法关系式

$$\bar{x}^\alpha=\varphi^\alpha(y,\ x);$$

(iii) 因此也成立

$$D\omega^\alpha(x,\ dx)=\frac{1}{2}\bar{c}^\alpha_{\beta\gamma}[\omega^\beta,\ \omega^\gamma],$$

这里的 $\bar{c}^\alpha_{\beta\gamma}$ 为常数，且滿足 Jacobi 恒等式.

$\omega^\alpha(x,\ dx)$称为規范的第二类不变形式的完全系，它們的任意的常系数綫性組合称为第二类不变形式.

和以前一样，可以看到

$$\varphi^\alpha(x,\ \omega(x,\ dx))\doteq x^\alpha+dx^\alpha,$$

因此，規范的第二类不变形式可由

$$\omega(x,\ dx)\doteq x^{-1}\cdot(x+dx)$$

所确定.

为求出 $\bar{c}^\alpha_{\beta\gamma}$ 和 $c^\alpha_{\beta\gamma}$ 的关系，我們在 G 上定义另外一种乘法关系：x 和 y 两元素相乘以后得到元素 z，其坐标为

$$z^\alpha=\psi^\alpha(x,\ y)=\varphi^\alpha(y,\ x).$$

依据这样的乘法关系，我們显然也会得到一个局部李群 H. 事实上，由

$$\begin{aligned}\psi^\alpha(\psi(x,\ y),\ z)&=\varphi^\alpha(z,\ \psi(x,\ y))=\varphi^\alpha(z,\ \varphi(y,\ x))\\&=\varphi^\alpha(\varphi(z,\ y),\ x)=\psi^\alpha(x,\ \psi(y,\ z))\end{aligned}$$

就能驗証結合律的成立,其余的条件更为显然.

依定义,群 H 的第一类不变形式的完全系即为 G 的第二类不变形式的完全系. 如果作对应

$$Tx=x^{-1},$$

并把它視为从 G 到 H 的对应,这个对应是同构,这因为,Tx 和 Ty 依群 H 的乘法关系相乘就是 y^{-1} 和 x^{-1} 依群 G 的乘法相乘,因而得到 $y^{-1}\cdot x^{-1}=(x\cdot y)^{-1}=T(xy)$,其余的条件是显然的.

因为群的同构可以有相同的結构常数,所以 $\bar{c}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 也是出現在第一类不变形式中的結构常数,而且由这些論述立即可以推出

$$\omega^{\alpha}(x,\ dx)=\breve{\omega}^{\alpha}(\psi(x),\ d\psi(x)),$$

式中的 $\breve{\omega}^{\alpha}$ 为第一类的不变形式,$\psi(x)$ 表示 x 的逆元素.

两类不变形式实际上具有平等的地位,关于第一类不变形式的任一性质都可以有第二类不变形式的相应的性质,而且其推导是完全平行的. 我們在本章中往往只就第一类不变形式进行討論,其結果均可平行地沿用到第二类不变形式.

我們在后文中再叙述不变形式这个名詞的由来.

§3·4 子群. 正常子群

先引入局部李群的子群的定义.

定义 在 r 維局部李群 G 中有一过 e 的 n 維解析流形 H,在 e 的适当邻域中的任两元素的乘积都在 H 之内,那末 H 就称为群 G 的子群[1].

設 H 的方程表示为

$$x^{\alpha}=f^{\alpha}(u^1,\ \cdots,\ u^n), \tag{3·4·1}$$

这里 f^{α} 为解析函数,满足

$$0=f^{\alpha}(0,\ \cdots,\ 0), \tag{3·4·2}$$

---

[1] 我們在这里只討論解析子群。后文中将对这一限制作补充的說明.

且矩陣$\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^i}\right)$在 e 邻近的秩数为 n. 設 $x\in H$, $y\in H$, $z=xy$ 的坐标为

$$z^\alpha=\varphi^\alpha(f(u), f(v)). \tag{3·4·3}$$

依定义,存在函数 $\psi^i(u, v)$ 使

$$z^\alpha=f^\alpha(\psi(u, v)), \tag{3·4·4}$$

这里的 $\psi^i(u, v)$ 必为 u, v 的解析函数，这因为从(3·4·4)解出 ψ^i, 可知 ψ^i 必为 z^α（实际上是部分的 z^α）的解析函数，又利用(3·4·3)可知z^α为u, v 的解析函数,因而有此結果. H 中的元素关于乘法显然满足結合律，又 e 仍然为单位元素，因此我們可得:局部李群的子群必为局部李群[1].

和普通的群論中一样，設 $a\in G$, 表达为 Ha 形状的元素的集合称为一个右旁集,右旁集的方程为

$$x^\alpha=\varphi^\alpha(f(u), a), \tag{3·4·5}$$

它当 a 适当小时有意义,也为解析流形.

現任取过 e 的另一 $r-n$ 維解析流形，使它和 H 在 e 点沒有公共的切向量,不妨設这一流形的方程为

$$x^\alpha=h^\alpha(u^{n+1}, \cdots, u^r) \quad (0=h^\alpha(0, \cdots, 0)), \tag{3·4·6}$$

并且在 e 点$\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^i}$, $\frac{\partial h^\alpha}{\partial u^p}$$(i=1, 2, \cdots, n;\ p=n+1, \cdots, r)$表示$r$个綫性独立的切向量．令

$$x^\alpha=\varphi^\alpha(f(u^i), h(u^p))=f^\alpha(u^\beta), \tag{3·4·7}$$

那末 f^α 为 u^β 的解析函数,而且容易驗証$\det\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\beta}\right)$在 $u^\alpha=0$ 时不为 0, 因此(3·4·7)可作为解析坐标的变换．在此变换下子群具方程

$$u^p=0, \tag{3·4·8}$$

[1] 根据 § 3·1 的結果,逆元素的存在并属于 H 是不成問題的。

而

$$u^p = c^p \quad (c^p: 常数) \tag{3·4·9}$$

表示旁集. 从此还可見到，在这坐标系統下，当 a 为元素 $(a^1, \cdots, a^r)$ 时右旁集 Ha 的方程也是 $u^p = a^p$. 事实上，$(a^1, \cdots, a^r)$ 和 $(0, \cdots, 0, a^{n+1}, \cdots, a^r)$ 属于同一旁集，和普通的群論的結果一样，这两个元素所决定的右旁集相同，因此就是 $u^p = a^p$，所以 (3·4·9) 在局部的意义下表示右旁集的全体. 現仍用 x^α 来記 u^α，由群的乘法关系可知，若 $x \in H$, $y \in Ha$，則 $xy \in Ha$，因此

$$\varphi^p(x^i, 0;\ y^i, y^p) = y^p.$$

依 § 3·1 的記号，我們有

$$a_j^p(y) = 0,$$

因此也有

$$\tilde{a}_j^p(y) = 0.$$

从此就知道部分的規范的第一类不变形式

$$\tilde{\omega}^p(x, dx) = -\tilde{a}_\alpha^p(x)dx^\alpha = -\tilde{a}_q^p(x)dx^q,$$

因此 Pfaff 方程組 $\tilde{\omega}^p = 0$ 为完全可积，其全系初积分可选为 x^p $(p = n+1, \cdots, r)$ 而积分流形

$$x^p = \text{const}$$

分别代表子群和旁集.

相反地，如果能选到 $r-n$ 个独立的第一类不变形式 $\tilde{\omega}^p$，使

$$\tilde{\omega}^p(x, dx) = 0 \tag{3·4·10}$$

为完全可积，那末这个方程的过 e 点的积分流形必为子群，其他的积分流形必为旁集.

为了証明这一点，我們选取坐标系統，使 x^p 就是 (3·4·10) 的 $r-n$ 个独立的初积分，且 $(0, \cdots, 0)$ 为单位元素，这时 $\tilde{\omega}^p(x, dx)$ 可书为

$$\tilde{\omega}^p(x, dx) = A_q^p(x)dx^q, \quad \det(A_q^p) \neq 0.$$

因群的乘法关系 φ^α 满足

$$A_q^p(\varphi)d\varphi^q = A_q^p(x)dx^q,$$

所以我們有

$$\frac{\partial\varphi^p}{\partial x^i} = 0.$$

因此

$$\varphi^p(x^i,\ 0;\ y^i,\ y^p) = \varphi^p(0,\ 0;\ y^i,\ y^p) = y^p, \quad (3\cdot4\cdot11)$$

特别，

$$\varphi^p(x^i,\ 0;\ y^i,\ 0) = 0. \quad (3\cdot4\cdot12)$$

所以，由方程 $x^p=0$ 所定义的 n 維解析流形 H 中 e 的适当邻域内的任两元素的乘积都在 H 中，因此 H 为子群．又由(3·4·11)看出，右旁集 Ha 的确由 $x^p=a^p$ 所决定．

因此我們得到

定理 1 設 ω^p 为局部李群 G 的 $r-n$ 个独立的第一类不变 Pfaff 式，又 $\omega^p=0$ 为完全可积，那末这一 Pfaff 方程組的 n 維积分流形必为子群及右旁集系．又其逆也成立，即，G 的任一 n 維子群及其旁集必为适当的方程組 $\omega^p=0$ 的积分流形．

由此可見，寻求一个局部李群的子群的問題可归結为求一些不变形式的集合，使由它們能构成完全可积的 Pfaff 方程組．

注 定义中所說的子群是解析子群，但我們还有下述事实：把 H 为解析流形的条件放松为 C^3 的流形，又依群的乘法关系满足局部群的条件，那末依定理的証明可見，H 及其右旁集也是由一組完全可积的 Pfaff 方程

$$c_\alpha^p\omega^\alpha(u,\ du) = 0$$

所定义的，所以 H 仍然为解析流形．

再引入

定义 設 H 为局部李群 G 的子群，如果对任何 e 的一充分

小邻域中的任意元素 a，均成立 $aH=Ha$，那末 H 就称为正常子群.

这里的 $aH=Ha$ 是指在局部意义下成立，即有 H 在 e 的一个邻域 H_1，能有 $aH_1=H_1a$，等号表示左边和右边这两个集合由相同的元素构成.

設 H 为 n 維的正常子群，那末它首先是一个子群. 选取适当的坐标系統，就能使 $x^p=0$ 为 H 的方程，$x^p=c^p$ 为旁集的方程(这时右旁集和左旁集的概念是一致的)，由于这时成立 $aH\cdot bH=abH$，所以在乘法关系中的 $\varphi^p(x^i, x^p; y^j, y^q)$ 和 x^i, y^j 都无关，即

$$\varphi^p(x^i, x^p; y^j, y^q)=\varphi^p(x^p, y^q), \qquad (3\cdot4\cdot13)$$

因此，$\varphi^p(x^p, y^q)$ 的展开式中除 $a_i^p(x)=0$ 外，还有 $a_q^p(x)$ 只依賴于 x^p，因此得 $\tilde{\omega}^p(x, dx)$ 不仅能表为 dx^p 的微分的組合，而且它的系数也只依賴于 x^p.

其逆，如在群 G 的第一类不变形式中，能找出 $r-n$ 个独立的 Pfaff 式 $\tilde{\omega}^p$，使 $\tilde{\omega}^p=0$ 为完全可积，且 $\tilde{\omega}^p$ 可由 $\tilde{\omega}^p=0$ 的初积分及其微分所完全表达，記这些初积分就是 x^p，$x^p=0$ 定义了子群 H，在这样的条件下，当我們考察方程

$$\tilde{\omega}^\alpha(\bar{x}, d\bar{x})=\tilde{\omega}^\alpha(x, dx)$$

时，就可以把一部分方程

$$\tilde{\omega}^p(\bar{x}, d\bar{x})=\tilde{\omega}^p(x, dx) \qquad (3\cdot4\cdot14)$$

分开来积分，因此，群的乘法关系中 $\varphi^p(x, y)$ 不依賴于 x^i 和 y^i. 因 H 由 $x^p=0$ 定义，所以旁集 Ha 由

$$x^p=\varphi^p(0, a)=a^p$$

所定义，又旁集 aH 由

$$x^p=\varphi^p(a, 0)=a^p$$

所定义，所以有 $aH=Ha$，依定义，H 为正常子群.

我們已經証明了

定理 2　为使子群 H 为正常子群，其充要条件是定义子群的 Pfaff 方程(3·4·10)的右边 $\varpi^p(x, dx)$ 能用这 Pfaff 方程的初积分表达．

現假定定义子群 H 的不变形式已选为 ϖ^p，又 ϖ^p 和 ϖ^i 构成全系的第一类不变形式，由于 $\varpi^p=0$ 为完全可积，所以在結构常数中必須有 $c^p_{ij}=0$，即 Cartan-Maurer 方程可写成

$$\left.\begin{aligned} D\varpi^i&=\frac{1}{2}c^i_{\alpha\beta}[\varpi^\alpha, \varpi^\beta], \\ D\varpi^p&=c^p_{iq}[\varpi^i, \varpi^q]+\frac{1}{2}c^p_{qs}[\varpi^q, \varpi^s] \end{aligned}\right\} \tag{3·4·15}$$

的形狀．如果 H 是正常子群，那末依 § 2·4 的討論，还必須有 $c^p_{iq}=0$，因此 Cartan-Maurer 方程为

$$\left.\begin{aligned} D\varpi^i&=\frac{1}{2}c^i_{\alpha\beta}[\varpi^\alpha, \varpi^\beta], \\ D\varpi^p&=\frac{1}{2}c^p_{qs}[\varpi^q, \varpi^s]. \end{aligned}\right\} \tag{3·4·16}$$

当 $\varpi^p=0$ 的初积分取为 $x^p=0$，且单位元素有坐标 $(0,\cdots,0)$ 时，則子群可取 x^i 为坐标，乘法关系由

$$\varphi^i(x^j, 0; y^k, 0)$$

所确定，因此子群 H 有第一类不变形式

$$\underset{0}{\varpi}^i=\varpi^i(x^j, 0; dx^j, 0), \tag{3·4·17}$$

它所滿足的 Cartan-Maurer 方程为

$$D\underset{0}{\varpi}^i=\frac{1}{2}c^i_{jk}[\underset{0}{\varpi}^j, \underset{0}{\varpi}^k]. \tag{3·4·18}$$

又和普通群論中所討論的一样，如 H 为正常子群，可以定义商群 G/H，旁集是它的元素，它的乘法关系依 $aH\cdot bH=abH$ 来肯定，因此商群的乘法关系由函数 $\varphi^p(x^q, y^s)$ 来表示，因而它

有第一类不变形式 $\breve{\omega}^{\rho}(x, dx)$，結构常数为 $c^{\rho}_{\sigma s}$.

上述結果使我們把决定 n 維子群的問題化为如下問題：設 $\breve{\omega}^{\alpha}$ 为群的第一类不变形式的完全系，求作一組常数 c^{ρ}_{α}，使方程

$$\breve{\theta}^{\rho}=c^{\rho}_{\alpha}\breve{\omega}^{\alpha}=0$$

为完全可积，但 (c^{ρ}_{α}) 的秩数应为 $r-n$. 再注意到§2·3关于 Pfaff 系統的完全可积性的討論和 Cartan-Maurer 方程，这个問題最終就化为代数問題. 决定正常子群的問題同样也可化为純代数的問題.

§3·5 举 例

我們現在要举出若干重要的例子，以說明以上几节中所叙述的一般理論.

例 1 首先我們考虑在适当解析坐标下，乘法关系由

$$z^{\alpha}=x^{\alpha}+y^{\alpha} \tag{3·5·1}$$

所定义的局部李群. 立即可以見到，局部李群的条件(i)，(ii)，(iii)都成立，这时(3·1·10)中的 $a^{\alpha}_{\beta}(y)=\delta^{\alpha}_{\beta}$，所以規范的第一类不变形式为

$$\breve{\omega}^{\alpha}(x, dx)=-dx^{\alpha}. \tag{3·5·2}$$

因为 $\breve{\omega}^{\alpha}(x, dx)$ 为全微分，所以 Cartan-Maurer 方程化为

$$D\breve{\omega}^{\alpha}=0,$$

这就說明，結构常数为零.

由于这样的局部李群的乘法次序是可换的，所以它称为可换群或 Abel 群.

一群为 Abel 群的充要条件是其結构常数 $c^{\alpha}_{\beta\gamma}=0$. 我們已見到其必要性，但如两局部李群有相同的結构常数則它們同构，所以这条件也为充分的. 当然，这一事实也可通过直接积分而得到. 同样地，第二类不变形式也为全微分.

容易見到，所有的一維局部李群都是 Abel 群。

所有的子群均为正常子群，$r-s$ 維的子群由 Pfaff 方程

$$c_{p\alpha}\varpi^{\alpha}=0 \quad (p=1, 2, \cdots, s)$$

或有限方程

$$c_{p\alpha}x^{\alpha}=0$$

所确定，$c_{p\alpha}$ 为任意一組常数，但$(c_{p\alpha})$的秩数应为 s。

例 2　設 $r=2$，G 的元素 x 有坐标(x^1, x^2)，乘法关系为

$$z^1=\varphi^1(x, y)=x^1+y^1, \quad z^2=\varphi(x, y)=x^2+e^{x^1}y^2, \tag{3·5·3}$$

e 为元素$(0, 0)$。容易見到，局部李群的条件(i)，(ii)，(iii)都成立。因此可定义一群。和(3·1·10)比較，我們有

$$a_1^1(y)=1, \quad a_2^1(y)=0;$$
$$a_1^2(y)=y^2, \quad a_2^2(y)=1.$$

因此可得第一类規范不变形式为

$$\varpi^1(x, dx)=-dx^1, \quad \varpi^2(x, dx)=x^2dx^1-dx^2. \tag{3·5·4}$$

Cartan-Maurer 方程为

$$D\varpi^1=0, \quad D\varpi^2=-[\varpi^1, \varpi^2], \tag{3·5·5}$$

所以結构常数中不为零的只有

$$c_{12}^2=-\frac{1}{2}, \quad c_{21}^2=\frac{1}{2}.$$

容易驗証 Jacobi 方程满足。因 $r=2$，所有的解析子群为一維的。为决定它們，作 Pfaff 式 $\omega=a\varpi^1+b\varpi^2$，

$$D\varpi=-b[\varpi^1, \varpi^2].$$

如 $b=0$，我們得到一个子群 $x^1=0$，它是一个正常子群。如 $b\neq 0$，不妨設它为 1，这时

$$D\varpi=-[\varpi^1, \omega].$$

因此方程 $\varpi=0$ 也为完全可积，此时 Pfaff 方程可书为

$$x^2dx^1-dx^2-adx^1=0,$$

子群的方程为

$$x^2=a(1-e^{x^1}).$$

它不是正常子群.

例 3 G 的元素为实数所成的 n 阶非异陣(x^i_j), 以陣的乘法确定群中的乘法, 这时单位元素 e 为单位陣 (δ^i_j), 可把 x^i_j 取为元素的坐标 (单位元素的坐标是 δ^i_j 而不是 $x^i_j=0$), 我們利用(3·1·16)来求出它的第一类规范的不变形式, 这时应有

$$\delta^i_j+\tilde{\omega}^i_j(x, dx)\doteq(x^i_k-dx^i_k)\tilde{x}^k_j,$$

$(\tilde{x}^k_j)$为(x^i_j)的逆陣, 因此

$$\tilde{\omega}^i_j(x, dx)=-\tilde{x}^k_j dx^i_k.$$

再作 Cartan-Maurer 方程:

$$D\tilde{\omega}^i_j(x, dx)=-[d\tilde{x}^k_j, dx^i_k],$$

因为 $\tilde{x}^k_j x^i_k=\delta^i_j$; 所以 $x^i_k d\tilde{x}^k_j=-\tilde{x}^k_j dx^i_k$, 或

$$d\tilde{x}^k_j=-\tilde{x}^k_i\tilde{x}^l_j dx^i_l,$$

因此

$$D\tilde{\omega}^i_j=\tilde{x}^k_h\tilde{x}^l_j[dx^h_l, dx^i_k]=[\tilde{\omega}^h_j, \tilde{\omega}^i_h].$$

这样, 我們事实上就已决定了这个群的結构常数. 对一般的 n, 这群的子群是非常多的, 要全部决定出来是不容易的. 在后文中我們还要进一步討論群 G 的許多子群.

§3·6 一維子群

依 §3·4 的研究, r 維局部李群的一維子群应由 $r-1$ 个独立的第一类(或第二类)不变形式所构成的 Pfaff 方程决定. 如果 $\tilde{\omega}^\alpha$ 为第一类不变形式的完全系, 那末一維子群的微分方程应具形状

$$\theta^p=c^p_\alpha\tilde{\omega}^\alpha=0 \quad (p=2, \cdots, r), \tag{3·6·1}$$

式中 c_α^β 为常数，且矩陣(c_α^β)的秩数为 $r-1$. 由于自变量的个数为 r，$r-1$ 个独立的 Pfaff 式所成的 Pfaff 方程組总是完全可积的，所以对 c_α^β 就不必再添加其他的条件了. (3·6·1)等价于方程

$$\omega^1:\omega^2:\cdots:\omega^r=c^1:c^2:\cdots:c^r \quad (c^\alpha \text{ 为不全为 0 的常数}). \tag{3·6·2}$$

如記

$$\omega^\alpha=A_\beta^\alpha(x)\,dx^\beta, \tag{3·6·3}$$

那末引入一維子群的一个适当的参数 t 之后，可把(3·6·2)写成

$$\frac{dx^\alpha}{dt}=c^\beta \tilde{A}_\beta^\alpha(x), \tag{3·6·4}$$

式中 $\tilde{A}_\beta^\alpha$ 为(A_β^α)的逆陣中的元素. 由于照例已設$(0, \cdots, 0)$为单位元素，所以相应的一維子群为方程(3·6·4)以

$$t=0, \quad x^\alpha=0 \tag{3·6·5}$$

为初始条件的解. 把它写成

$$x^\alpha=f^\alpha(t,\ c^\beta). \tag{3·6·6}$$

由于(3·6·4)在变换 $\bar{c}^\beta=\sigma c^\beta$, $\bar{t}=\dfrac{t}{\sigma}$ (σ 为常数)下为不变，又初始条件也不受这个变换的影响，根据解的唯一性，我們有

$$f^\alpha(t,\ c^\beta)=f^\alpha\left(\frac{t}{\sigma},\ \sigma c^\beta\right).$$

特别取 $\sigma=t$，我們就有

$$x^\alpha=f^\alpha(1,\ tc^\beta)=\varphi^\alpha(tc^\beta). \tag{3·6·7}$$

从此也可見到，当常数 c^β 换为 σc^β 时，一維子群沒有发生变化. 如果选取 ω^α 使满足

$$A_\beta^\alpha(0)=-\delta_\beta^\alpha,$$

那末 $c^1, c^2, \cdots, c^r$ 就有特別的意义，这就是：相应的一維子群在 e 点和向量$(c^1, c^2, \cdots, c^r)$相切，并且，只有一个一維的子群和同一方向相切. 在这样的假定下，我們再考虑一下(3·6·7)式. 令 $u^\alpha=tc^\alpha$，那末(3·6·7)式显然在 u^α 和 0 适当接近时有意义，且

φ^α 为 u 的解析函数．此外，由(3·6·4)及(3·6·5)得出

$$x^\alpha = c^\alpha t + \cdots = u^\alpha + \cdots,$$

式中略去的项是关于 $c^\alpha t$ 或 u^α 为高于一次的，因此

$$\left.\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^\beta}\right|_{u=0} = \delta^\alpha_\beta,$$

所以可把

$$\bar{x}^\alpha = \varphi^\alpha(u^\beta)$$

作为坐标变换，而在 u^α 坐标下，一維子群的方程具有最簡单的形状

$$u^\alpha = c^\alpha t, \qquad (3\cdot6\cdot8)$$

式中 c^α 为任意一組不全为零的常数．这样的坐标称为法坐标，我們可以如下地理解它：法坐标是群中的在 e 的适当邻域中的元素和 e 点的相切空間(即由切向量的全体所成的空間)之間的一对一的对应，在这对应之下，一維子群对应于由 e 点出发的直綫，这直綫的方向就是这子群在 e 点的切向量．

附带指出，两个法坐标之間的变换必然是綫性变换．这因为，設

$$\bar{u}^\alpha = f^\alpha(u^\beta) \qquad (3\cdot6\cdot9)$$

为从一个法坐标变为另一法坐标的变换，依法坐标的意义可知

$$f^\alpha(c^\beta t) = \bar{c}^\alpha t, \qquad (3\cdot6\cdot10)$$

式中的 $\bar{c}^\alpha$ 应由

$$\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\beta}\right)_0 c^\beta = \bar{c}^\alpha$$

所确定．令 c^β 充分小，使 $t=1$ 时 $f^\alpha(c^\beta t)$ 也有意义，在(3·6·10)式中置 $t=1$，我們就得到

$$\bar{u}^\alpha = c^\alpha_\beta u^\beta \quad \left(c^\alpha_\beta = \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\beta}\right)_0\right). \qquad (3\cdot6\cdot11)$$

此外，(3·6·11)本身也的确把法坐标变为法坐标．因此我們可

以說：法坐标除了一个綫性变换外是唯一确定的.

§ 3·7 局部变换群

設 Ω 为 n 个变量 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 所成的空間的一个区域，G 为 r 个变量 $(u^1, \cdots, u^r)$ 所成的空間的一个区域，又 e: $(0, \cdots, 0)$ 为 G 中的一点. 設

$$\bar{x}^i = f^i(x, u) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3·7·1}$$

为定义在 $\Omega \times G$ 上的解析函数[1]. 假設成立

(i)
$$x^i = f^i(x, 0), \tag{3·7·2}$$

(ii) 存在定义域为 $u \in G$, $v \in G$ 的解析函数 $\varphi^\alpha(u, v)$[2] 及定义域为 $u \in G$ 的解析函数 $\psi^\alpha(u)$，使当 u, v 在 $(0, \cdots, 0)$ 的一个适当邻域中时 $\varphi^\alpha(u, v)$, $\psi^\alpha(u)$ 的值域也在 G 内，且使

$$f^i(f(x, v), u) = f^i(x, \varphi(u, v)), \tag{3·7·3}$$

$$\varphi^\alpha(\varphi(u, v), w) = \varphi^\alpha(u, \varphi(v, w)), \tag{3·7·4}$$

$$\varphi^\alpha(u, \psi(u)) = 0, \tag{3·7·5}$$

$$\varphi^\alpha(u, 0) = u^\alpha \tag{3·7·6}$$

当 u, v, w 在 e 的一个适当邻域中时成立，又对 (3·7·3) 式还要求 x 是 Ω 中满足 $f(x, v) \in \Omega$ 的点. 那末我們称 (3·7·1) 构成一个解析的局部变换群或解析的变换拟群 Σ, $u^1, \cdots, u^r$ 称为群的参数.

依定义，G 构成一个局部群，乘法关系为 $\varphi(u, v)$. 由 (3·7·3) 可見，从 G 中元素 (u) 到 Σ 中变换 (3·7·1) 的对应是一个同态，这就是，由 (3·7·1) 所定义的变换如記为 S_u，那末由 (3·7·3) 就有

---

[1] $\Omega \times G$ 表示 $r+n$ 維区域，由 $(x^1, \cdots, x^n, u^1, \cdots, u^r)$ 的集合构成，但 $(x^1, \cdots, x^n) \in \Omega$, $(u^1, \cdots, u^r) \in G$.

[2] $\varphi^\alpha(u, v)$ 也可以只在 u, v 属于 e 的一个适当邻域中确定.

$$S_u S_v = S_{\varphi(u,v)}, \tag{3·7·7}$$

我們也說 Σ 是群 G 的一个表示.

特别,如取 Ω 重合于 G, 又令

$$\bar{x}^\alpha = \varphi^\alpha(u, x), \tag{3·7·8}$$

把它視为 G 上的变换 S_u, 那末 $S_u x = u\cdot x$, 我們就得到局部李群的一个表示. 又令

$$\bar{x}^\alpha = \varphi^\alpha(x, u), \tag{3·7·9}$$

把它視为 G 上的变换 T_u, 那末 $T_u x = x\cdot u$, 我們得到局部李群的又一个表示. 这两个表示分别称为左推移和右推移.

現在要导出(3·7·1)式中的函数 f 所应滿足的微分方程. 为此,作

$$\begin{aligned} f^i(x, u+du) &= f^i(f(\bar{x}, \psi(u)), u+du) \\ &= f^i(\bar{x}, \varphi(u+du, \psi(u))), \end{aligned}$$

略去 du 的高阶无穷小, 由 (3·1·6) 知道 $\varphi^\alpha(u+du, \psi(u)) = -\breve{\omega}^\alpha(u, du)$,式中 $\breve{\omega}^\alpha$ 为規范的第一类不变形式, 所以上式又等于

$$\bar{x}^i - \frac{\partial f^i(\bar{x}, u)}{\partial u^\alpha}\bigg|_{u=0} \breve{\omega}(u, du).$$

因此,如記

$$\xi^i_\alpha = \frac{\partial f^i(\bar{x}, u)}{\partial u^\alpha}\bigg|_{u=0}; \tag{3·7·10}$$

又令 $d\bar{x}^i = f^i(x, u+du) - f^i(x, u)$, 那末在一阶无穷小范圍内就有

$$d\bar{x}^i + \xi^i_\alpha(\bar{x})\breve{\omega}^\alpha(u, du) = 0, \tag{3·7·11}$$

这就是 (3·7·1) 所滿足的微分方程. 对应于初始条件 $u^\alpha = 0$, $\bar{x}^i = x^i$, 它的解就是(3·7·1),因 x^i 为任意的,所以(3·7·11)是完全可积的 Pfaff 方程.

对(3·7·11)进行外微分，得

$$[d\xi^i_\alpha,\ \tilde{\omega}^\alpha]+\xi^i_\alpha D\tilde{\omega}^\alpha=0,$$

利用

$$d\xi^i_\alpha=\frac{\partial\xi^i_\alpha(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\,d\bar{x}^j$$

以及 Cartan-Maurer 方程，改記 $\bar{x}^i$ 为 x^i 并引入記号

$$\frac{\partial\xi^i_\alpha(x)}{\partial x^j}=\xi^i_{\alpha,j}(x),\tag{3·7·12}$$

我們有

$$(\xi^i_{\gamma,j}\xi^j_\beta-\xi^i_{\beta,j}\xi^j_\gamma+c^\alpha_{\beta\gamma}\xi^i_\alpha)\,[\tilde{\omega}^\beta,\ \tilde{\omega}^\gamma]=0.$$

由此得到

$$\xi^i_{\beta,j}\xi^j_\gamma-\xi^i_{\gamma,j}\xi^j_\beta=c^\alpha_{\beta\gamma}\xi^i_\alpha,\tag{3·7·13}$$

这就是方程(3·7·11)中的 ξ^i_α 所应满足的关系式。

再指出，如果 G 到 Σ 的对应是局部同构，那末由 $c^\alpha\xi^i_\alpha=0$ 就推出 $c^\alpha=0$，换言之，r 个向量場 ξ^i_α 是常系数綫性独立的。事实上，若有不全为 0 的 c^α 能使 $c^\alpha\xi^i_\alpha=0$，那末作 G 的一个一維子群，它的定义方程为

$$\tilde{\omega}^1:\tilde{\omega}^2:\cdots:\tilde{\omega}^r=c^1:c^2:\cdots:c^r.$$

这个子群的元素所对应的 $\bar{x}^i$ 满足

$$d\bar{x}^i=0,$$

卽整个子群对应于恒等变换

$$\bar{x}^i=x^i,$$

这表示 G 到 Σ 的对应并非同构。以后我們感兴趣的是同构的表示，因为，如果表示为同态而非同构，同态的核为 G 的一个正常子群，那末 Σ 就是商群的同构的表示。

現考察相反的問題，設有完全可积的微分方程(3·7·11)，且 $\xi^i_\alpha(x)$ 为常系数独立的向量場，$\tilde{\omega}^\alpha(u,\ du)$ 为独立的 Pfaff 系。

要証明：(i) $\breve{\omega}^\alpha(u, du)$是一个 r 維局部李群 G 的第一类不变形式的完全系統，(ii) 以 $u^\alpha=0$, $\bar{x}^i=x^i$ 为初始条件的解的集合是 G 的一个同构的表示.

为此，由(3·7·11)的外微分并利用(3·7·11)就得到

$$\frac{1}{2}(\xi^i_{\beta,j}\xi^j_\gamma-\xi^i_{\gamma,j}\xi^j_\beta)[\breve{\omega}^\beta, \breve{\omega}^\gamma]-\xi^i_\alpha D\breve{\omega}^\alpha=0. \qquad (3\cdot7\cdot14)$$

由于 $\breve{\omega}^\alpha$ 只和 u, du 有关，且 $\breve{\omega}^\alpha$ 为独立的，所以存在函数 $c^\alpha_{\beta\gamma}(u)$，使

$$D\breve{\omega}^\alpha=\frac{1}{2}c^\alpha_{\beta\gamma}(u)[\breve{\omega}^\beta, \breve{\omega}^\gamma]. \qquad (3\cdot7\cdot15)$$

又由(3·7·14)知道

$$\xi^i_{\beta,j}\xi^j_\gamma-\xi^i_{\gamma,j}\xi^j_\beta=c^\alpha_{\beta\gamma}(u)\xi^i_\alpha,$$

因左边和 u 无关，令 $u=0$，記 $c^\alpha_{\beta\gamma}(0)=c^\alpha_{\beta\gamma}$，我們就有

$$(c^\alpha_{\beta\gamma}(u)-c^\alpha_{\beta\gamma})\xi^i_\alpha=0.$$

依假定，ξ^i_α 为常系数綫性独立的，所以得 $c^\alpha_{\beta\gamma}(u)=c^\alpha_{\beta\gamma}=$常数，因此也有

$$\xi^i_{\beta,j}\xi^j_\gamma-\xi^i_{\gamma,j}\xi^j_\beta=c^\alpha_{\beta\gamma}\xi^i_\alpha. \qquad (3\cdot7\cdot14')$$

依 §3·2 的結果可知，$\breve{\omega}^\alpha(u, du)$为一个局部李群 G 的第一类不变形式的完全系. 令 $\varphi^\alpha(u, v)$ 为其乘法关系($u^\alpha=0$ 对应单位元素)，又以 $u^\alpha=0$, $\bar{x}^i=x^i$ 为初始条件的解为

$$\bar{x}^i=f^i(x, u),$$

我們要証明(3·7·3)式成立. 为此，令

$$\bar{x}^i=f^i(f(x, v), u), \quad \bar{\bar{x}}^i=f^i(x, \varphi(u, v)),$$

把 u 視为自变量，x, v 視为参数，微分这两个式子，就得到

$$d\bar{x}^i=-\xi^i_\alpha(\bar{x})\breve{\omega}^\alpha(u, du),$$

$$d\bar{\bar{x}}^i=-\xi^i_\alpha(\bar{\bar{x}})\breve{\omega}^\alpha(\varphi, d\varphi)=-\xi^i_\alpha(\bar{\bar{x}})\breve{\omega}^\alpha(u, du),$$

因此函数 $\bar{x}^i$ 和 $\bar{\bar{x}}^i$ 适合同一微分方程，并且，当 $u=0$ 时，

$$\bar{x}^i=f^i(x, v), \quad \bar{\bar{x}}^i=f^i(x, v).$$

由此可見，这两个函数也满足同一初始条件，所以 $\bar{x}^i=\bar{\bar{x}}^i$，这就是所要証明的(3·7·3)式．又(3·7·4)，(3·7·5)是显然的．由上面的討論也容易看出，不存在 G 的子群，会对应恒等变换．所以我們得到

定理 1（变换群的第一基本定理） 如果函数組 (3·7·1) 定义一个变换群，則它必然满足形为(3·7·11)的微分方程．又如方程(3·7·11)具解析系数，且为完全可积，又 ξ^i_α 为常系数綫性独立，$\breve{\omega}^\alpha$ 也为独立的，那末以 $u^\alpha=0$, $\bar{x}^i=x^i$ 为初始条件的解的集合組成一个变换群．

注 在定理的第二部分关于 $\breve{\omega}^\alpha$ 系数的解析性的要求能减輕为：它的系数具二阶連續的导数．这是由 § 3·2 所指出的．又如 $\xi^i(x)$ 的解析性的要求也可降低，但这时(3·7·1)幷非解析函数．

以后总假設 ξ^i_α 为常系数綫性独立的．現探討 ξ^i_α 的意义．由 § 3·6 知道，选取了适当参数 t 后，群 G 的每一一維子群由

$$\frac{\breve{\omega}^1}{dt}=c^1, \quad \frac{\breve{\omega}^2}{dt}=c^2, \quad \cdots, \quad \frac{\breve{\omega}^r}{dt}=c^r \quad (c^\alpha\text{：不全为 0 的常数})$$

所确定，其初始条件为 $t=0$ 时，$u^\alpha=0$．因此，变换群 Σ 的一維子群（或称单参数子群）就由方程

$$\frac{d\bar{x}^i}{dt}=c^\alpha\xi^i_\alpha(\bar{x}) \tag{3·7·16}$$

及初始条件 $t=0$, $\bar{x}^i=x^i$ 所决定．

因此，在 $|t|$ 很小时，略去它的高次項，我們得到

$$\bar{x}^i=x^i+c^\alpha\xi^i_\alpha(x)t. \tag{3·7·17}$$

这样的变换称为变换群 Σ 的无穷小变换．无穷小变换是由单参数子群的方程所决定的．相反地，知道了无穷小变换，单参

数子群的方程也就能够明确地写出来.

引入联系于单参数变换群的微分算子是很有作用的：对无穷小变换(3·7·17)，引入一阶齐次的微分算子

$$X=c^{\alpha}\xi_{\alpha}^{i}(x)\frac{\partial}{\partial x^{i}}, \tag{3·7·18}$$

它对应于一个单参数变换群，X 的全体組成一个 r 維的向量空間，可选

$$X_{\alpha}=\xi_{\alpha}^{i}(x)\frac{\partial}{\partial x^{i}} \tag{3·7·19}$$

为基. 設 $F(x)$ 为 (x) 空間的数量函数，設 $\bar{x}^{i}=f^{i}(x, t)$ 为对应于(3·7·16)的单参数变换群，那末 XF 的意义是

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(\bar{x}^{i})-F(x^{i})}{t}=XF, \tag{3·7·20}$$

或者

$$F(\bar{x}^{i})\doteq F(x^{i})+tXF.$$

我們常說，由(3·7·16)所定义的单参数变换群是由微分算子(3·7·18)所生成，而整个变换群为由微分算子系(3·7·19)所生成.

所引入的微分算子 X_{α} 之間还存在着“換位运算”

$$[X_{\alpha}, X_{\beta}]=X_{\alpha}X_{\beta}-X_{\beta}X_{\alpha}=(\xi_{\alpha}^{j}\xi_{\beta,j}^{i}-\xi_{\beta}^{j}\xi_{\alpha,j}^{i})\frac{\partial}{\partial x^{i}}, \tag{3·7·21}$$

而(3·7·14′)式表明

$$[X_{\alpha}, X_{\beta}]=c_{\alpha\beta}^{\gamma}X_{\gamma}. \tag{3·7·22}$$

我們要証明如下的定理.

定理 2 (变換群的第二基本定理) 設 $\xi_{\alpha}^{i}(x)$ $(\alpha=1, 2, \cdots, r)$ 为一組常系数独立的向量，且算子 $X_{\alpha}=\xi_{\alpha}^{i}\frac{\partial}{\partial x^{i}}$ 滿足关系(3·7·22)，那末必存在一局部变換群 Σ，使其中的单参数子群

为由微分算子 $c^{\alpha}X_{\alpha}$ 所生成.

【証】 对于任何三个微分算子 X_{α}, X_{β}, X_{γ}, 通过直接計算就知道,一定会成立下述的 Jacobi 恒等式:

$$[[X_{\alpha}, X_{\beta}], X_{\gamma}]+[[X_{\beta}, X_{\gamma}], X_{\alpha}] + [[X_{\gamma}, X_{\alpha}], X_{\beta}]=0. \tag{3·7·23}$$

再因为(3·7·22)及 ξ^i_{α} 的常系数独立性,我們就有

$$c^{\delta}_{\alpha\beta}c^{\varepsilon}_{\delta\gamma}+c^{\delta}_{\beta\gamma}c^{\varepsilon}_{\delta\alpha}+c^{\delta}_{\gamma\alpha}c^{\varepsilon}_{\delta\beta}=0,$$

这就是(3·7·22)中的常数 $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 必満足 §3·2 中的 Jacobi 恒等式,依 §3·2 定理 2, 有独立的 Pfaff 式 $\breve{\omega}^{\alpha}$, 使

$$D\breve{\omega}^{\alpha}=\frac{1}{2}c^{\alpha}_{\beta\gamma}[\breve{\omega}^{\beta}, \breve{\omega}^{\gamma}]$$

成立,因而微分方程

$$d\bar{x}^i+\xi^i_{\alpha}(\bar{x})\breve{\omega}^{\alpha}(u, du)=0$$

为完全可积,由第一基本定理就得出所要的結論.

例 1 完全綫性群

$$\bar{x}^i=a^i_jx^j, \quad \det|a^i_j|\neq 0 \tag{3·7·24}$$

就是一个变换群,它是非异方陣(a^i_j)所成的群的表示. 这里

$$d\bar{x}^i=x^jda^i_j=\bar{x}^k\tilde{a}^j_kda^i_j \quad ((\tilde{a}^j_k)\text{ 为 }(a^i_j)\text{ 的逆陣}).$$

如記(見 §3·3)

$$\tilde{a}^j_kda^h_j=\breve{\omega}^h_k, \tag{3·7·25}$$

$$\xi^{ki}_h=-\delta^i_hx^k, \tag{3·7·26}$$

那末就成立

$$d\bar{x}^i+\xi^{ki}_h\breve{\omega}^h_k=0, \tag{3·7·27}$$

这就是(3·7·11)式. 又可定义

$$X^k_h=-x^k\frac{\partial}{\partial x^h}, \tag{3·7·28}$$

我們就有

$$[X^k_h, X^m_l]=-\delta^m_hX^k_l+\delta^k_lX^m_h, \tag{3·7·29}$$

这就是(3·7·22)式.

例 2 設 $\xi^i(x)$ 为 n 維变量空間任一解析的向量場，在所論范圍内 $\xi^i(x)$ 在每点不全为 0，那末令

$$X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

成立关系

$$[X,\ X]=0.$$

因此，由方程

$$\frac{d\bar{x}^i}{dt}=\xi^i(\bar{x})$$

和初始条件 $t=0$, $\bar{x}^i=x^i$ 就能够确定出单参数的变换群

$$\bar{x}^i=f^i(x,\ t).$$

由此可見单参数变换群的数目是十分多的.

§3·8 变换子群

我們已經知道，一个局部李群 G 的解析子群是由 Pfaff 方程

$$c^p_\alpha\overset{\circ}{\omega}{}^\alpha=0 \quad (p=s+1,\ \cdots,\ r) \tag{3·8·1}$$

所定义的. 任一局部变换群 G_1 又可看作某一群 G 的表示，因此，G 的子群 H 必对应于 G_1 的子群 H_1. 現問，相应于 G_1 的微分算子是哪些? 为此，我們考察方程

$$d\bar{x}^i+\xi^i_\alpha(\bar{x})\overset{\circ}{\omega}{}^\alpha(u,\ du)=0. \tag{3·8·2}$$

我們对 $\overset{\circ}{\omega}{}^\alpha(u,\ du)$ 进行常系数綫性变换（因而 ξ^i_α 也相应地受到一个綫性变换），使(3·8·1)变为

$$\overline{\overset{\circ}{\omega}}{}^p(u,\ du)=0.$$

仍改記 $\overline{\overset{\circ}{\omega}}{}^p(u,\ du)$ 为 $\overset{\circ}{\omega}{}^p(u,\ du)$，把改变后的 $\xi^i_\alpha(x)$ 仍記为 $\xi^i_\alpha(x)$，依 §3·4 的記号，用 $\underset{0}{\overset{\circ}{\omega}}{}^a(u,\ du)$ 記 H_1 的第一类不变形式 $(a=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$，那末对于群 H_1，方程(3·8·2)化为

$$d\bar{x}^i+\xi_a^i(\bar{x})\underset{0}{\breve{\omega}}^a(u, du)=0.$$

因此，其微分算子为

$$X_a=\xi_a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

及其綫性組合．所以子群对应于微分算子的一个綫性子空間．因这时成立 $c_{ab}^\rho=0$，所以我們有

$$[X_a, X_b]=c_{ab}^c X_c,$$

因而我們得到：局部变換群 G_1 的子群 H_1 的微分算子是由 G_1 的微分算子全体所成的向量空間的一个子空間所构成，这一子空間在換位运算中为封閉的．又依据 §3·7 定理 2 可知其逆亦眞．

H_1 为正常子群的条件是 $c_{\alpha a}^\rho=0$，这就是說，G_1 的微分算子和 H_1 的微分算子的換位运算所得到的算子总是 H_1 的微分算子．

到这里为止，我們已逐步形成了"李代数"的概念，我們将在下一节詳細叙述它．

最后，我們还将說明一些补充事項：

注 1 本章所討論的局部李群和局部变換群都假定它們所依賴的是实的变量，所遇到的函数为实的解析函数；但同样的討論完全适用于复变量的解析函数的情形．这就是，我們也可以有复的李群和复的变換群，例如复数域的完全綫性群就是复的变換群．但是，如果我們把群的参数和变換的变量的实部和虛部都当作独立的变量，我們仍然可以把复的情形归于实的情形．当然，在有許多場合，直接探討复的群和复的变換是有很多方便之处的．

注 2 局部变換群可分为可迁的（局部的）和不可迁的两大类．可迁的变換群是指每点 x 可以通过群中的变換而变到它的

任一邻近点,否则就是不可迁的. 我們現在要指出,群为可迁的充要条件是其无穷小变換的基向量 ξ^i_α 所成的陣 (ξ^i_α) 在所討論的范圍內具秩数 n. 事实上, 不妨設 $\bar{\omega}^\alpha(u, du)$ 为規范的不变 Pfaff 式, 且不妨設 $\det|\xi^i_j|\neq 0$. 把 x^i 取定为一点 (x^i_0), 那末 x^i_0 所能变到的点可用方程

$$x^i=f^i(x_0, u)$$

表示,但

$$\xi^i_\alpha(x_0)=\left(\frac{\partial f^i(x_0, u)}{\partial u^\alpha}\right)_0,$$

因此,依隐函数存在定理可見,由

$$x^i=f^i(x^i_0, u^1, \cdots, u^n, 0, \cdots, 0)$$

可解出 $u^1, \cdots, u^n$, 这表明: 当 $u^1, \cdots, u^n$ 在 $(0, \cdots, 0)$ 的一个邻域中变动时, (x^i) 也取到点 (x^i_0) 的某一邻域中的一切的点.

不可迁的群也是应該加以細致研究的对象, 但限于本书的篇幅,我們不再多加叙述,我們只是指出, 当群 G_1 的参数小于 n 时, 群必为不可迁的, 但不可迁的群的参数也可以远远超过 n. 例如, 我們考慮 $n+1$ 維空間的单位球面, 把繞一固定軸的所有轉动作为变換群, 此群显然为不可迁群, 但是群的参数为 $\frac{n(n-1)}{2}$.

第四章 李代数.綫性李代数

§4·1 李 代 数

在上一章中我們已經导出一个由变换群的微分算子所成的向量空間，在其中有着“换位运算”，这实际上已导来了李代数的概念. 在本章中我們要系統地叙述一些有关李代数的基本事項，也要討論和此有联系的关于綫性群的一些情况.

先从李代数的定义开始.

定义 r 維的复(实)李代数是指一个 r 維的复(实)向量空間 A_r，在其中的任两元素 x, y 間已定义好一个换位运算 $[x, y]$，使能滿足

（i） 封閉性：$[x, y] \in A_r$；

（ii） 反称性：$[x, y] = -[y, x]$；

（iii） 双綫性：$[ax_1 + bx_2, y] = a[x_1, y] + b[x_2, y]$，
式中 a, b 为任意复(实)数；

（iv） 成立 Jacobi 恒等式：

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0. \quad (4·1·1)$$

如果在 A_r 中已选好一組基 $e_1, e_2, \cdots, e_r$，那末由于性质

(iii)，换位运算关系能由

$$[e_\alpha,\ e_\beta]=c^\gamma_{\alpha\beta}e_\gamma \tag{4·1·2}$$

所唯一确定，这里 $c^\gamma_{\alpha\beta}$ 为一組复(实)数．依据反称性(ii)，我們有

$$c^\gamma_{\alpha\beta}=-c^\gamma_{\beta\alpha}. \tag{4·1·3}$$

依据性质(iv)，我們有关于 $c^\gamma_{\alpha\beta}$ 的 Jacobi 恒等式

$$c^\delta_{\alpha\beta}c^\varepsilon_{\delta\gamma}+c^\delta_{\beta\gamma}c^\varepsilon_{\delta\alpha}+c^\delta_{\gamma\alpha}c^\varepsilon_{\delta\beta}=0. \tag{4·1·4}$$

$c^\alpha_{\beta\gamma}$ 称为李代数的結构常数．如果作 A_r 的基的变换，就可見到 $c^\alpha_{\beta\gamma}$ 是一个一阶反变，二阶共变的張量的支量．

相反地，如果給定一組复(实)数 $c^\alpha_{\beta\gamma}$，关于下标反称，又满足 Jacobi 恒等式，那末利用 (4·1·2) 及条件 (iii) 就可以在 r 維复(实)向量空間中定义出换位运算，得到一个李代数．

在本章的其余部分，我們說到李代数时，有时并不明白地指出它为实李代数或复李代数．这表明，有关的事項既可对实李代数有效，也可对复李代数有效．

我們可以举出不少的李代数的例子．

例 1 可换李代数．在一向量空間 A_r 中定义

$$[x,\ y]=0 \quad (x,\ y\in A_r),$$

我們就得到一个李代数，它称为可换的李代数．任何一維的李代数总是可换的．

例 2 变换群的微分算子李代数．在 §3·8 中已經指出，对应于一个 r 参数的变换群可作出一个由微分算子所組成的向量空間，在这空間中的任何两个微分算子能够满足条件 (i)，(ii)，(iii)，(iv)，因此构成了一个李代数．所以一个变换群的微分算子构成了一个李代数．相反地，有了一个李代数之后，必有一个局部李群，以 $c^\gamma_{\alpha\beta}$ 为結构常数．但依 § 3·7，李群可以作为本身的一个表示，所以存在一个由微分算子所組成的李代数，和已給的李代数具有相同的結构常数．这就是說，微分算子的李代数

“取遍”所有的李代数.

例 3 綫性李代数. $n\times n$ 的矩陣的全体构成了 n^2 維的向量空間. 如以 A, B, C 等表示这个空間的元素，并定义换位运算为

$$[A, B]=AB-BA, \tag{4·1·5}$$

那末它也就构成一个李代数，称为 n 維向量空間的全綫性李代数. 这时条件(i)，(ii)，(iii)是沒有問題的，至于条件(iv)也可以加以直接驗証.

对应李代数可定义子代数，这就是

定义 在李代数 A_r 中如有一个子空間 A_s，它关于 A_r 中已定义好的换位运算为封閉的，那末就称 A_s 为 A_r 的子代数.

由定义可知，A_r 的任何一維的子空間必然是子代数.

还可定义理想子代数.

定义 如 A_s 为 A_r 的子代数，又满足：$x\in A_s$, $y\in A_r$，则成立 $[x, y]\in A_s$，那末 A_s 就称为 A_r 的理想子代数.

依定义可以知道，可换李代数的任何子空間都是理想子代数.

我們还可以引入如下的定义：如有两个李代数之間有一对一的綫性对应 T，并使换位关系得到保持，即

$$[Tx, Ty]=T[x, y], \tag{4·1·6}$$

那末这两个李代数的对应称为同构的. 如果对应 T 不是一对一，但(4·1·6)保持，那末称这对应为同态.

一个李代数 A_r 如分解为两个子空間 A_{s_1}, A_{s_2} 的直和（依向量空間直和的定义），又 A_{s_1}, A_{s_2} 为理想子代数，那末称李代数 A_r 分解为李代数 A_{s_1} 和 A_{s_2} 的直和.

这里显然有 $s_1+s_2=r$, A_{s_1} 和 A_{s_2} 只有零元素是公共的，并且，当 $x\in A_{s_1}$, $y\in A_{s_2}$ 时，因为

$$[x, y] \in A_{s_1} \cap A_{s_2},$$

所以 $[x, y]=0$. 这就是 A_{s_1} 中的元素和 A_{s_2} 中的元素的换位运算得零元素.

决定一个李代数的子代数是一个代数学的問題. 如果 r 維李代数有一个 n 維的子代数, 那末可选基 e_α, 使 e_i 为子代数的基 ($\alpha=1, 2, \cdots, r$; $i=1, 2, \cdots, n$), 这时成立

$$[e_i, e_j]=c_{ij}^k e_k, \tag{4·1·7}$$

卽

$$c_{ij}^p=0 \quad (p=n+1, n+2, \cdots, r). \tag{4·1·8}$$

所以求 n 維子代数的問題可归結为选基, 使能成立(4·1·8). 如果这个子代数还是理想子代数, 那末成立

$$[e_\alpha, e_j]=c_{\alpha j}^k e_k, \tag{4·1·9}$$

卽

$$c_{\alpha j}^p=0. \tag{4·1·10}$$

因此决定理想子代数的問題也归之于选基, 要使(4·1·10)式成立. 在 r 很小时, 决定所有 r 維李代数及其子代数并不十分困难, 但对于一般的 r, 这却是一个十分复杂的問題.

§4·2 李群和李代数的联系

在李群中引入法坐标, 相应于这一坐标的规范的第一类基本形式为 $\breve{\omega}^\alpha$, Cartan-Maurer 方程为

$$D\breve{\omega}^\alpha=\frac{1}{2} c_{\beta\gamma}^\alpha [\breve{\omega}^\beta, \breve{\omega}^\gamma]. \tag{4·2·1}$$

設在法坐标下, 单位元素的相切空間取基 $e_1(1, 0, \cdots, 0)$, $e_2(0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $e_r(0, \cdots, 0, 1)$, 又規定

$$[e_\beta, e_\gamma]=c_{\beta\gamma}^\alpha e_\alpha, \tag{4·2·2}$$

那末就使相切空間成为一个李代数.

我們如果把法坐标变为另一法坐标（在 § 3·6 中巳經証明，这变换是綫性的），那末基 e_α 应变为

$$e'_\alpha = a^\beta_\alpha e_\beta, \quad (a^\beta_\alpha)\text{为非异的}. \tag{4·2·3}$$

所以

$$[e'_\beta, e'_\gamma] = a^\delta_\beta a^\varepsilon_\gamma c^\lambda_{\delta\varepsilon} \tilde{a}^\alpha_\lambda e'_\alpha,$$

于此 $(\tilde{a}^\alpha_\lambda)$ 为 (a^α_λ) 的逆陣，这就是，所設李代数在新的基下的結构常数为

$$c'^\alpha_{\beta\gamma} = a^\delta_\beta a^\varepsilon_\gamma c^\lambda_{\delta\varepsilon} \tilde{a}^\alpha_\lambda. \tag{4·2·4}$$

另一方面，在新的坐标下，規范的 $\breve{\omega}'^\alpha$ 应为

$$\breve{\omega}'^\alpha = \tilde{a}^\alpha_\lambda \breve{\omega}^\lambda, \quad \breve{\omega}^\lambda = a^\lambda_\beta \breve{\omega}'^\beta. \tag{4·2·5}$$

所以由 (4·2·1) 可見

$$D\breve{\omega}'^\alpha = \frac{1}{2} c'^\alpha_{\beta\gamma} [\breve{\omega}'^\beta \breve{\omega}'^\gamma], \tag{4·2·6}$$

式中的 $c'^\alpha_{\beta\gamma}$ 即为 (4·2·4) 式所定义的．由此可見，(4·2·1) 和 (4·2·2) 的联系并不因为法坐标的选取而有改变．这就是說，把局部李群在单位元素的相切空間依方程 (4·2·2) 定义为李代数，是有內在的意义的．

設

$$\breve{\omega}^1 : \breve{\omega}^2 : \cdots : \breve{\omega}^r = c^1 : c^2 : \cdots : c^r \tag{4·2·7}$$

定义一单参数变换群，在法坐标之下，若已知道它可以用方程

$$x^\alpha = c^\alpha t \tag{4·2·8}$$

来表示，而任一 n 維子群可以由方程

$$c^p_\alpha \breve{\omega}^\alpha = 0 \quad (p = n+1, \cdots, r) \tag{4·2·9}$$

所定义，式中 c^p_α 为常数，陣 (c^p_α) 的秩数为 $r-n$，又能保証 (4·2·9) 为完全可积，那末，在这一子群中的单参数子群 H 在 e 点的切向量 c^α 也能滿足

$$c^p_\alpha c^\alpha = 0, \tag{4·2·10}$$

因此，n 維子群就对应于李代数中的 n 維平面 $P_n: c_\alpha^\nu x^\alpha=0$. 如果选取坐标，使(4·2·9)变为

$$\tilde{\omega}^\nu=0, \qquad (4\cdot2\cdot11)$$

由于它是完全可积，所以有

$$c_{ij}^\nu=0 \quad (i, j=1, 2, \cdots, n). \qquad (4\cdot2\cdot12)$$

这就表示，P_n 也为子代数. 其逆，李代数的子代数也的确能够对应于李群的子群，这因为，可选坐标，使子代数有方程

$$x^\nu=0,$$

那末就成立(4·2·12)式，因此(4·2·11)为完全可积. 这样，我們就得到子群和子代数相对应的事实.

同样地，如 H 为正常子群，P_n 显然会是理想子代数，其逆亦真.

这样，我們就完全建立好局部李群和李代数之間的一个联系. 这就是局部李群可以和李代数中的零元素的一个邻域建立一一对应，使子群和子代数相对应，正常子群和理想子代数相对应.

这种对应也可以通过微分算子来达到. 如所知，局部李群总可以有同构的表示，对应于每一个表示，总有微分算子李代数，对于不同的表示，这些微分算子李代数是同构的，因此，我們可以任意选取一个表示来考虑而不会失去一般性.

設在群 G_r 的某一同构表示下，微分算子李代数有基

$$X_\alpha=\xi_\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i}. \qquad (4\cdot2\cdot13)$$

一般的变换由方程

$$\frac{d\bar{x}^i}{dt}=c^\alpha\xi_\alpha^i(\bar{x}) \qquad (4\cdot2\cdot14)$$

及初始条件：$t=0$, $\bar{x}^i=x^i$ 所决定. 当 c^α 充分小时，方程的解可

以在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 有效，設其解为

$$\bar{x}^i=f^i(t,\ x^j,\ c^\alpha),$$

由方程的形状可見

$$\bar{x}^i=f^i(t,\ x^j,\ c^\alpha)=f^i\left(\sigma t,\ x^j,\ \frac{1}{\sigma}c^\alpha\right)=f^i(1,\ x^j,\ tc^\alpha).$$

所以令

$$u^\alpha=tc^\alpha,$$

也会得到局部李群中的一个坐标，这个坐标事实上就是法坐标。坐标为 c^α 的群中元素可对应于微分算子李代数中的元素 $c^\alpha X_\alpha$。群中元素所对应的变换就是

$$\bar{x}^i=f^i(1,\ x^j,\ c^\alpha).$$

子代数和理想子代数分别对应于子群和正常子群这一事实也是非常清楚的。

§ 4·3　綫性群和綫性李代数

已經知道，n 維向量空間中的綫性变换所成的群称为綫性群。在 § 3·7 中已指出，完全綫性群的微分算子李代数的基可选取为

$$X_h^k=-x^k\frac{\partial}{\partial x^h}. \tag{4·3·1}$$

因此，微分算子李代数中的每一元素 X 可記为

$$X=c_k^hX_h^k. \tag{4·3·2}$$

因此，完全綫性群的微分算子李代数的元素能和一方陣 $C=(c_k^h)$ 构成一对一的对应。現作

$$Y=d_k^hX_h^k, \tag{4·3·3}$$

它对应于方陣 $D=(d_k^h)$，考察

$$[X, Y]=c_k^h d_l^m X_h^k X_m^l - d_l^m c_k^h X_m^l X_h^k$$

$$=c_k^h d_l^m [X_h^k, X_m^l] = c_k^h d_h^m x^k \frac{\partial}{\partial x^m} - c_m^h d_l^m x^l \frac{\partial}{\partial x^h}$$

$$=(c_m^h d_l^m - d_m^h c_l^m)\left(-x^l \frac{\partial}{\partial x^h}\right), \qquad (4\cdot 3\cdot 4)$$

它所对应的方陣恰为

$$[C, D]=CD-DC, \qquad (4\cdot 3\cdot 5)$$

因此,完全綫性群的微分算子李代数和全綫性李代数是同构的.

全綫性李代数的每一个子代数称为綫性李代数，从以上的討論可見,任何綫性群的李代数和某一綫性李代数是同构的,綫性变换群(局部的)的決定和綫性李代数的子代数的決定是相互等价的問題.

設綫性李代数为已知，可以用如下的方法来決定相应的变换群:設这个綫性李代数的基为 $B_\alpha=(b_{j\alpha}^i)$ $(\alpha=1, 2, \cdots, r)$,作微分方程

$$\frac{d\bar{x}^i}{dt}=c^\alpha b_{j\alpha}^i \bar{x}^j, \qquad (4\cdot 3\cdot 6)$$

給出初始条件 $t=0$, $\bar{x}^i=x^i$，我們就得到一个单参数变换群，如設 $b_j^i=c^\alpha b_{j\alpha}^i$, $(b_j^i)=B$, 那末这个单参数变换群的有限方程是

$$\bar{x}^i=\left(\delta_j^i+tb_j^i+\frac{1}{2}t^2 b_k^i b_j^k+\cdots\right)x^j=a_j^i(t)x^j, \qquad (4\cdot 3\cdot 7)$$

变换的方陣为

$$(a_j^i(t))=E+tB+\frac{1}{2}t^2B^2+\cdots=e^{Bt}\,[1]. \qquad (4\cdot 3\cdot 8)$$

从此得到:綫性李代数中元素 B 所生成的单参数綫性变换群的矩陣为 $(a_j^i(t))=e^{Bt}$. 由(4·3·7)和(4·3·6)得到

$$\frac{da_j^i(t)}{dt}=b_k^i a_j^k(t), \quad a_j^i(0)=\delta_j^i. \qquad (4\cdot 3\cdot 9)$$

[1] 可以証明,級数 (4·3·8) 在 $|t|\leqslant M$ (M 任意正数) 为一致收斂. 如果不利用这一点,我們也可以把 $(a_j^i(t))$ 形式上記为 e^{Bt}.

此外，我們还应有

$$a^i_j(t_1+t_2)=a^i_k(t_1)a^k_j(t_2),$$

即

$$e^{B(t_1+t_2)}=e^{Bt_1}e^{Bt_2}. \qquad (4\cdot3\cdot10)$$

特别，

$$e^{Bt}\cdot e^{-Bt}=E.$$

此外，我們还注意到

$$Be^{Bt}=e^{Bt}B. \qquad (4\cdot3\cdot11)$$

为此，我們考察

$$A(t)=Be^{Bt}-e^{Bt}B,$$

进行微分，得

$$\frac{dA(t)}{dt}=BBe^{Bt}-Be^{Bt}B=BA(t).$$

又当 $t=0$ 时 $A(t)=0$，所以由常微分方程組解的唯一性可知，$A(t)=0$，这就証明了(4·3·11)。

在第一章中已經指出，在变換

$$\bar{x}^i=a^i_jx^j \qquad (4\cdot3\cdot12)$$

之下，張量 $T^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k}$ 为不变的意义是：

$$\tilde{a}^{h_1}_{i_1}\tilde{a}^{h_2}_{i_2}\cdots\tilde{a}^{h_k}_{i_k}a^{j_1}_{m_1}\cdots a^{j_l}_{m_l}T^{m_1\cdots m_l}_{h_1\cdots h_k}=T^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k} \qquad (4\cdot3\cdot13)$$

成立。現設这一張量在某一綫性群下为不变，因此它也在任一单参数变換群下为不变，在(4·3·13)式中把 a^i_j 用 e^{Bt} 的元素代入，$\tilde{a}^i_j$ 用 e^{-Bt} 的元素代入，关于 t 微分，并令 $t=0$，这就得到

$$-b^h_{i_1}T^{j_1j_2\cdots j_l}_{hi_2\cdots i_k}-b^h_{i_2}T^{j_1j_2\cdots j_l}_{i_1h\cdots i_k}-\cdots-b^h_{i_k}T^{j_1j_2\cdots j_l}_{i_1i_2\cdots h}$$
$$+b^{j_1}_hT^{hj_2\cdots j_l}_{i_1i_2\cdots i_k}+\cdots+b^{j_l}_hT^{j_1j_2\cdots h}_{i_1i_2\cdots i_k}=0, \qquad (4\cdot3\cdot14)$$

当 b^j_i 换为 $b^j_{i\alpha}(\alpha=1,2,\cdots,r)$ 时，(4·3·14)也应該成立。

相反地，如(4·3·14)对綫性李代数的基成立，对于这个李代数所对应的綫性群(局部群)而言，它的每一元素均属于一个

单参数变换群，令 (4·3·13) 的左側的 $(a^i_j(t))$ 和 $(\tilde{a}^i_j(t))$ 分别为 e^{Bt} 和 e^{-Bt}，記所得的函数为 $T^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_k}(t)$，在 $t=0$ 时它就是 (4·3·13) 的右側，又对函数 $T^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_k}(t)$ 关于 t 微分，注意到 (4·3·6)，(4·3·11) 和 (4·3·14)，就得知 $T^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_k}(t)$ 和 t 无关，因而 (4·3·13) 式成立，这样，我們就得出

定理 1 張量 T 在綫性变换群 G 下不变的充要条件是 (4·3·14) 对綫性群 G 的綫性李代数中的任何元素成立.

用 (4·3·14) 代替 (4·3·13) 的优点是：(4·3·14) 的左端关于 b^i_j 为綫性的.

我們考察典型群的李代数作为例子.

（i） 单模群. 設我們已选取标形的基，使变换的方陣的行列式为 1. 对每一单参数子群来說，成立

$$a(t)=\det|a^i_j(t)|=1;$$

另一方面，

$$\frac{da(t)}{dt}=a(t)\tilde{a}^j_i(t)\frac{da^i_j(t)}{dt}=a(t)\tilde{a}^j_i(t)b^i_k a^k_j(t)$$

$$=a(t)b^j_j,$$

所以綫性李代数中元素必有

$$b^j_j=0.$$

其逆，如有方陣 (b^i_j)，适合 $b^j_j=0$，它所产生的綫性变换的行列式和 t 无关，考虑到初始情况就知道，这行列式必然为 1. 因此得单模群的綫性李代数为所有的迹数为零的方陣組成.

（ii） 直交群. 設已选好正交基，此时 δ_{ij} 为不变張量，公式 (4·3·14) 这时应为

$$b^j_i+b^i_j=0,$$

所以直交群的綫性李代数为由反称陣的全体組成.

（iii） 辛群. $2m$ 維空間的辛群的不变張量可取为 g_{ij}:

$$g_{ab}=0,\quad g_{a'b'}=0,\quad g_{ab'}=\delta_{ab},\quad g_{a'b}=-\delta_{ab},$$

式中

$$a,\ b=1,\ \cdots,\ m;\quad a'=a+m,\ b'=b+m.$$

依(4·3·14)式,就成立

$$-b_a^{b'}+b_b^{a'}=0,\quad b_a^b+b_{b'}^{a'}=0,\quad b_{a'}^b-b_{b'}^a=0,$$

所以辛群的李代数是由形为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A' \end{pmatrix}$$

的方陣构成,式中 A 为 $m\times m$ 陣, A' 为A的轉置, B, C 为对称陣.

最后,我們討論綫性群的可約性和它的綫性李代数的可約性之間的关系.

設 G 为一可約的綫性群,选空間的基,使 $e_1,\ \cdots,\ e_m$ 构成不变平面的基,那末对群中所有的变换,均有 $a_\lambda^p=0$ $(p=m+1,\ \cdots,\ n;\ \lambda=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$. 取 G 中任一单参数变换群,又在(4·3·9)式中令 $i=p,\ j=\lambda$,我們得

$$b_\mu^p a_\lambda^\mu=0\quad(\mu=1,\ 2,\ \cdots,\ m).$$

显然 $\det|a_\lambda^\mu|\neq 0$,所以也有 $b_\mu^p=0$,这就是説,綫性李代数也是由可約的綫性变换的方陣組成,且以群 G 的不变平面为不变平面.

相反地,如綫性群 G 的綫性李代数有不变平面,也可选空間的基,使不变平面由向量 $e_1,\ \cdots,\ e_m$ 生成,那末就成立 $b_\mu^p=0$. 考察由 (b_j^i) 所生成的单参数群 $(a_j^i(t))$ 中的 $a_\mu^p(t)$,依(4·3·9)式有

$$\frac{da_\mu^p(t)}{dt}=b_q^p a_\mu^q(t),$$

且滿足初始条件 $a_\mu^p(t)=0$. 依微分方程組解的唯一性定理就推出 $a_\mu^p(t)=0$,由此就知道群 G 为可約的,且有同样的不变平面.

把一綫性李代数看成綫性变换的集合，如果这一集合有非平凡的不变平面，那末就称它为可約的．我們剛才所証明的事实可表达为

定理 2 綫性群 G 和它的綫性李代数 H 同时为可約或同时为不可約，且二者有相同的不变平面．

§4·4 內微分代数．綫性伴随群

設 A_r 为一个 r 維的李代数，当 x 取 A_r 中一个固定元素时，可以由它定义 A_r 到自身的一个綫性变换 A_x：

$$A_x u=[x, u] \quad (u\in A_r). \qquad (4\cdot4\cdot1)$$

考察所有 A_x 的集合，由于

$$aA_x+bA_y=A_{ax+by},$$

$$[A_x, A_y]u=A_xA_yu-A_yA_xu=[x, [y, u]]-[y, [x, u]]$$
$$=[[x, y], u]=A_{[x,y]}u, \qquad (4\cdot4\cdot2)$$

所以我們可知此集合构成一个綫性李代数，称为李代数 A_r 的內微分代数．

設 $e_1, \cdots, e_r$ 为 A_r 的一組基，且有

$$[e_\alpha, e_\beta]=c_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma,$$

則

$$A_{y_\alpha}e_\beta=[e_\alpha, e_\beta]=c_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma. \qquad (4\cdot4\cdot3)$$

由此可見，內微分代数是由方陣$(c^\alpha c_{\alpha\beta}^\gamma)$的集合构成．

在李代数 A_r 及其內微分代数之間自然地会有如下对应：

$$x\rightarrow A_x. \qquad (4\cdot4\cdot4)$$

由(4·4·2)式可見，此对应是綫性的，而且

$$[x, y]\rightarrow A_{[x,y]}=[A_x, A_y],$$

所以，这对应是同态对应．其同态核由满足

$$A_y=0$$

的所有元素 x 构成，称为李代数的中核．换言之，中核就是满足

$$[x, y]=0 \quad (\text{对所有 } y\in A_r) \tag{4·4·5}$$

的所有元素 x 的全体．特别当中核只包含零元素时，同态就化为同构，其逆亦真．决定中核的問題就归結为解綫性方程

$$y^\alpha c_{\alpha\beta}^\gamma=0; \tag{4·4·6}$$

即設 y^α 为方程(4·4·6)的解，作集合 $y^\alpha e_\alpha$ 就得到中核．

内微分李代数在李代数内生成一个綫性群，称为伴随綫性群．根据前节定理 2 可知，内微分李代数和綫性伴随群具有相同的不变平面．現再証明

定理 1 綫性伴随群的不变平面为李代数 A_r 的理想子代数，其逆亦真．

【証】 如綫性伴随群有不变平面 P_m，选基$\{e_a\}$，使 $e_1, \cdots, e_m$ 生成不变平面 P_m，那末成立

$$c_{\alpha p}^u=0 \quad (p=1, 2, \cdots, m;\ u=m+1, \cdots, r),$$

这就是

$$[e_\alpha, e_p]=c_{\alpha p}^q e_q \quad (q=1, 2, \cdots, m).$$

因而 P_m 为理想子代数，其逆也显然成立．

我們已知道，李代数可以作为局部李群在单位元素的相切空間，而当局部李群取法坐标时，就建立了局部李群和李代数的零元素的某一邻域之間的一个对应，現在感兴趣的是，在这对应下，伴随綫性群从李群的观点来看会有什么意义？

为此，我們注意到，对李群中一个元素 y 可以定义一个变换群(局部群)

$$\bar{x}=S_y x=y^{-1}xy, \tag{4·4·7}$$

容易見到

$$S_y S_z=S_{yz}, \tag{4·4·8}$$

所以 y 到 S_y 的对应是一个同态．S_y 所成的群称为群 G 的伴随

群．每一 S_y 为群 G 的一个自同构[1]．

現在法坐标下考察伴随群．設 y 属于一个单参数子群 $y^\alpha=a^\alpha t$，x 属于一个单参数子群 $x^\alpha=b^\alpha\tau$，那末当 t 不变而 τ 变动时，元素 S_yx 构成一单参数子群，設其方程为

$$S_yx=c^\alpha(t)\tau.$$

依 S_yx 的定义，

$$\begin{aligned} c^\alpha(t)\tau &= \varphi^\alpha(-bt,\ \varphi(a\tau,\ bt)) \\ &= \varphi^\alpha\left(-b^\epsilon t,\ b^\beta t+a^\beta\tau+\frac{\partial a_\gamma^\beta(0)}{\partial x^\delta}b^\delta ta^\gamma\tau+\cdots\right) \\ &= b^\alpha t+a^\alpha\tau+\frac{\partial a_\gamma^\alpha(0)}{\partial x^\delta}\ b^\delta ta^\gamma\tau+\cdots-b^\alpha t \\ &\quad -\frac{\partial a_\gamma^\alpha(0)}{\partial x^\delta}a^\delta\tau b^\gamma t+\cdots^{2)}. \end{aligned}$$

未写出的項关于 τ 均至少为二次，又因为左边关于 τ 为一次，所以右边也只要計算关于 τ 为一次的項．容易驗証（見 § 3·2）$c_{\beta\gamma}^\alpha=\frac{\partial a_\gamma^\alpha(0)}{\partial x^\beta}-\frac{\partial a_\beta^\alpha(0)}{\partial x^\gamma}$，所以

$$c^\alpha(t)\tau=(\delta_\gamma^\alpha+c_{\beta\gamma}^\alpha b^\beta t+\cdots)a^\gamma\tau.$$

如取 a^γ 充分小，$a^\gamma\tau$ 为变前点的法坐标 x^α，$c^\alpha(t)\tau$ 为变后点的法坐标 $\bar{x}^\alpha$，由这个式子即可見到

$$\bar{x}^\alpha=x^\alpha+c_{\beta\gamma}^\alpha b^\beta tx^\gamma+\cdots. \tag{4·4·9}$$

由此可見变換的无穷小算子由

$$c_{\beta\gamma}^\alpha x^\gamma\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tag{4·4·10}$$

的任意綫性組合生成，这就証明了

---

[1] 这种自同构称为內自同构．

[2] 式中 $\frac{\partial a_\gamma^\alpha(0)}{\partial x^\beta}$ 表 $\left.\frac{\partial a_\gamma^\alpha}{\partial x^\beta}\right|_{x=0}$．

定理 2 在法坐标下伴随群恰恰就符合于綫性伴随群，換言之，綫性伴随群为内自同构的全体所組成的伴随群在法坐标下的解析形式。

在已給的李代数中，当基已选定时，作

$$g_{\alpha\beta}=c^{\delta}_{\alpha\gamma}c^{\gamma}_{\beta\delta}, \tag{4·4·11}$$

因为 $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 在基的变換下应作为一阶反变，二阶共变的張量而变化，所以 $g_{\alpha\beta}$ 是一个二阶对称共变張量的支量，設 $x=x^{\alpha}e_{\alpha}$，$y=y^{\alpha}e_{\alpha}$，那末

$$f(x,y)=g_{\alpha\beta}x^{\alpha}y^{\beta} \tag{4·4·12}$$

就是一个双綫性型，称为李代数的 Cartan 数量积。

現証明

定理 3 Cartan 数量积是在綫性伴随群下不变的双綫性形式。

【証】 只要証明 $g_{\alpha\beta}$ 是在綫性伴随群下不变的張量就可以了。为此，考察

$$\begin{aligned}g_{\gamma\beta}c^{\gamma}_{\alpha\delta}+g_{\alpha\gamma}c^{\gamma}_{\beta\delta}&=c^{\lambda}_{\gamma\varepsilon}c^{\varepsilon}_{\beta\lambda}c^{\gamma}_{\alpha\delta}+c^{\lambda}_{\alpha\varepsilon}c^{\varepsilon}_{\gamma\lambda}c^{\gamma}_{\beta\delta}\\&=c^{\varepsilon}_{\beta\lambda}(c^{\lambda}_{\gamma\alpha}c^{\gamma}_{\varepsilon\delta}-c^{\lambda}_{\gamma\delta}c^{\gamma}_{\varepsilon\alpha})+c^{\lambda}_{\alpha\varepsilon}(c^{\varepsilon}_{\gamma\beta}c^{\gamma}_{\lambda\delta}-c^{\varepsilon}_{\gamma\delta}c^{\gamma}_{\lambda\beta}).\end{aligned}$$

改換一下作和的指标，就知道上式的右端实际上是恒等于零的。因此，依照 § 4·3 定理 1 就得到定理所需的結論。

我們再引入如下的定义。

定义 一个李代数如不包含非平凡的理想子代数（即除自身和零維子代数外，沒有其他的理想子代数），那末就称这李代数为单純的李代数。

一維的李代数必为单純的。

定义 一个李代数如能表示为若干个非一維的单純李代数的直和，那末这李代数就称为半单純的。

这里我們要叙述一下实李代数的复化的概念。把实李代数

依第一章的方法复化，得到一个复向量空間，仍然保留

$$[e_\alpha, e_\beta]=c_{\alpha\beta}^{\gamma}e_\gamma$$

(此时 $c_{\alpha\beta}^{\gamma}$ 为实数)，从此就得出一个复的李代数．容易見到，李代数的复化是和基的选取无关的．經过复化后，如仍保持原来的基，那末結构常数不变，Cartan 数量积的系数不变．

一实李代数复化后如为单純的，那末它本身显然也为单純的．实李代数本身为单純，复化后或者保持为单純，或者分解为两个同維数的单純李代数的直和．为了証明这一点，我們应用第一章的結果，把綫性伴随群复化，这时只可能有两种情形：

(i) 复化后的群仍为不可約，那末相应的复李代数无理想子代数，因此仍为单純的．

(ii) 复化后的群有且只有两个同維数的非平凡的不变平面，它除零元素外无公共元素，这时复李代数就分解为两个单純李代数的直和，这因为，設 $\{e_\alpha\}$ 为一組实基，又設 $f_1, \cdots, f_s$ 为复化后的一个理想李代数 A_s 的基 $(0<s<r)$，設

$$f_a=h_a^\alpha e_\alpha=(k_a^\alpha+il_a^\alpha)e_\alpha \quad (a=1, 2, \cdots, s),$$

式中 k_a^α, l_a^α 均为实数．又置

$$\bar{f}_a=\bar{h}_a^\alpha e_\alpha=(k_a^\alpha-il_a^\alpha)e_\alpha,$$

因为 A_s 为理想子代数，所以

$$[e_\alpha, f_a]=B_{\alpha a}^{b}f_b.$$

容易見到

$$[e_\alpha, \bar{f}_a]=\bar{B}_{\alpha a}^{b}\bar{f}_b.$$

因此 $\bar{f}_1, \cdots, \bar{f}_s$ 也构成一个理想子代数 $\bar{A}_s$ 的基．因为理想子代数的和与交仍为理想子代数，所以 $A_s+\bar{A}_s$, $A_s\cap\bar{A}_s$ 均为 A_r 的理想子代数．又它們必须为实的．由于 A_r 无非平凡的实的理想子代数，所以 $A_s+\bar{A}_s$ 即为 A_r，即 A_r 分解为 A_s 和 $\bar{A}_s$ 的直和．如 A_s 还有非平凡的理想子代数 A_t，那末 A_t 也为 A_r 的理想子代

数，$A_t+\overline{A}_t$ 为 A_r 的实的理想子代数，但这是不可能的。同理 $\overline{A}_s$ 也是单純的。这样就証实了我們的論述。从此也可見到，在实数域中为半单純的李代数經复化后是复数域中的半单純李代数。

再回到一般的情况，容易見到，如果一个李代数 A_r 包含一个非零的可换理想子代数，那末李代数的 Cartan 数量积必須为退化的。这因为，可选 A_r 的基 $e_1, e_2, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_r$ 使 $e_1, \cdots, e_p$ 构成可换理想子代数的基，那末

$$[e_a, e_b]=0 \qquad (a, b=1, \cdots, p),$$
$$[e_a, e_s]=c_{as}^b e_b \quad (s, t=p+1, \cdots, r),$$

所以有

$$c_{ab}^{\alpha}=0, \quad c_{as}^{t}=0.$$

因此

$$g_{ab}=c_{a\beta}^{\alpha}c_{\alpha b}^{\beta}=0, \quad g_{as}=c_{a\beta}^{\alpha}c_{\alpha s}^{\beta}=0,$$

从此就得出所述的事实。因此，如果李代数的 Cartan 数量积不退化，那末它就不包含非零的可换理想子代数。

根据李代数的系統理論，还可以得出如下的事实：

（i）李代数为半单純的充要条件是它不包含非零的可换理想子代数。

（ii）李代数为半单純的充要条件是它的 Cartan 数量积不退化。

（iii）半单純李代数分解为单純李代数的直和的分解方式是唯一的。

对于复李代数的情形，这些事实的証明可見 Дынкин Е. Б. [1]（在叙述形式上略有不同）。对于实数域上的情形，相应的事实也容易从复李代数理論中导出。关于半单純李代数的进一步的性質，除上述文章外还可参閱严志达 [1]，[2]。

§4·5 紧致李代数．直交代数

我們給出紧致李代数的定义．

定义 如果实李代数的綫性伴随群容有正定二阶对称共变張量，则称它为紧致李代数．

如在基 $e_1, \cdots, e_r$ 下，不变張量的支量为 $a_{\alpha\beta}$，則有

$$c^{\gamma}_{\beta\alpha}a_{\gamma\varepsilon}+c^{\gamma}_{\varepsilon\alpha}a_{\beta\gamma}=0.$$

特别选取李代数基，使 $a_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}$ 时，则有

$$c^{\varepsilon}_{\beta\alpha}+c^{\beta}_{\varepsilon\alpha}=0. \qquad (4\cdot5\cdot1)$$

可見，李代数 A_r 为紧致的充要条件是其綫性伴随群为 r 維空間中的直交群的子群．

我們要証下面的一个定理．

定理 1 紧致李代数 A_r 必可分解为中核及一些非一維的单純紧致李代数的直和．

【証】 如 A_r 为一維紧致李代数，则 A_r 本身即为中核，所以定理显然成立．下面設 A_r 为非一維的．

如果 A_r 的綫性伴随群为实不可約，則 A_r 无非平凡的理想子代数，所以 A_r 本身卽为非一維的单純紧致李代数．

如果 A_r 的綫性伴随群有非平凡的不变平面 K，因为存在正定的張量 $a_{\alpha\beta}$ 在綫性伴随群下不变，所以 K 关于 $a_{\alpha\beta}$ 的正交补 K' 同样在綫性伴随群下不变；又因为 $a_{\alpha\beta}$ 为正定的，所以 K 及 K' 的維数之和为 r．可見，A_r 分解为 K 及 K' 的直和，它們各为 A_r 的綫性伴随群下的不变平面，卽 K, K' 为 A_r 的理想子代数．設 K 为 m 維，K' 为 $r-m$ 維．

如在A_r中选基，使 $X_{\alpha'}\in K$, $X_{\alpha''}\in K'$，此处 $\alpha'=1, \cdots, m$; $\alpha''=m+1, \cdots, r$．則有 $a_{\alpha'\alpha''}=0$．又由于$(a_{\alpha\beta})$正定，可知$(a_{\alpha'\beta'})$，$(a_{\alpha''\beta''})$均为正定．因此

$$c^{\gamma}_{\beta\alpha}a_{\gamma\varepsilon}+c^{\gamma}_{\varepsilon\alpha}a_{\beta\gamma}=0,$$

可分写为

$$c^{\gamma'}_{\beta'\alpha'}a_{\gamma'\varepsilon'}+c^{\gamma'}_{\varepsilon'\alpha'}a_{\beta'\gamma'}=0,$$

$$c^{\gamma''}_{\beta''\alpha''}a_{\gamma''\varepsilon''}+c^{\gamma''}_{\varepsilon''\alpha''}a_{\beta''\gamma''}=0.$$

由此可見，K 及 K' 各自容有不变二阶正定对称張量 $(a_{\alpha'\beta'})$ 及 $(a_{\alpha''\beta''})$，因而 K 及 K' 均为紧致代数。这样一步步继續下去，直到不能析出綫性伴随群的不变平面，所以可把 A_r 分解为一些单純紧致理想子代数的直和：

$$A_r=\sum{}^{\cdot}H_\lambda\dotplus\sum{}^{\cdot}K_p,$$

其中 H_λ 是一維的，而 K_p 是非一維的，又 $\sum^{\cdot}$ 和 $\dotplus$ 均为直和的記号。显然，每一 H_λ 是属于中核的，現証 $\sum^{\cdot}H_\lambda$ 就是中核。这因为，如中核 $N\neq\sum^{\cdot}H_\lambda$，那末 N 和 $\sum^{\cdot}K_p$ 的交集 L 也属于中核，設 L 在某一 K_1 中的投影 L_1 为非零維的，那末由于 $[K_1,L_1]\subseteq[K_1,L]=0$，所以 L_1 属于 K_1 的中核，由于 K_1 为单純的，又非一維，所以这是不可能的。定理証毕。

定理 2 实直交代数的任何子代数均为紧致代数。

【証】 适当选取直交子代数 G' 的基为 $(c^j_{i\alpha})$ ($c^j_{i\alpha}$ 关于 i, j 反称)，作

$$a_{\alpha\beta}=-c^j_{i\alpha}c^i_{j\beta},$$

显然它是定义在 G' 中的二阶对称共变張量。因为

$$a_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta=-c^j_{i\alpha}c^i_{j\beta}a^\alpha a^\beta=\sum_{i,j}c^i_{j\alpha}a^\alpha\cdot c^i_{j\beta}a^\beta=\sum(c^i_{j\alpha}a^\alpha)^2\geqslant 0,$$

而利用基 $(c^j_{i\alpha})$ 的独立性知，此式的等号只在 $a^\alpha=0$ 时成立，因此 $a_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta$ 为正定的二次型。又因为

$$\begin{aligned}a_{\alpha\gamma}c^\gamma_{\beta\delta}+a_{\gamma\beta}c^\gamma_{\alpha\delta}&=-c^j_{i\alpha}c^i_{j\gamma}c^\gamma_{\beta\delta}-c^j_{i\gamma}c^i_{j\beta}c^\gamma_{\alpha\delta}\\&=-c^j_{i\alpha}(c^i_{k\beta}c^k_{j\delta}-c^i_{k\delta}c^k_{j\beta})-c^j_{i\gamma}(c^i_{k\alpha}c^k_{j\delta}-c^i_{k\delta}c^k_{j\alpha})=0,\end{aligned}$$

所以 $a_{\alpha\beta}$ 为 G' 的綫性伴随群的不变張量。这样，我們也就制作了李代数 G' 的綫性伴随群不变的正定二次型，因面，依照定义

就得知 G' 为紧致李代数，定理証毕.

我們还要进一步討論直交群的子群的一系列性质，这些性质在齐性 Riemann 空間的研究中是經常要用到的. 先証明下面的

引理 1　設 B 为一反称陣，必存在直交陣 C，使陣 $CB\widetilde{C}$ 具形状

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & k_1 \\ -k_1 & 0 \end{matrix} & & & & & \\ & \begin{matrix} 0 & k_2 \\ -k_2 & 0 \end{matrix} & & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \begin{matrix} 0 & k_p \\ -k_p & 0 \end{matrix} & & \\ & \mathbf{0} & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (4\cdot5\cdot2)$$

式中 $k_1, k_2, \cdots, k_p$ 均不为 0.

【証】　因 B 为反称陣，所以 B^2 必为对称陣，那末存在直交陣 C，使 $CB^2\widetilde{C}$ 为对角陣：

$$CB^2\widetilde{C}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \qquad (4\cdot5\cdot2')$$

但因 C 为直交陣，B 为反称陣，所以 $B_1=CB\widetilde{C}$ 也为反称陣. 此外，$B_1^2=CB^2\widetilde{C}$. 我們可以把 B 理解为一个綫性变换在一組直交基下的陣，C 相当于从一直交基变为另一組直交基的变换陣. 設 $B_1=(h_{ij})$，則由(4·5·2′)可見

$$\lambda_l=\sum_{k=1}^{n}h_{lk}h_{kl}=-\sum_{k=1}^{n}h_{lk}^2,$$

所以 $\lambda_l \leqslant 0 (l=1, 2, \cdots, n)$．因为 B_1^2 的特征根必須为 B_1 的特征根的平方，所以 B_1 的特征根为純虛数或 0，由于 B_1 为实的陣，所以 B_1^2 可写为

$$B_1^2=\begin{pmatrix} \begin{array}{cc} -k_1^2 & 0 \\ 0 & -k_1^2 \end{array} & & & & & \\ & \begin{array}{cc} -k_2^2 & 0 \\ 0 & -k_2^2 \end{array} & & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \begin{array}{cc} -k_p^2 & 0 \\ 0 & -k_p^2 \end{array} & & \\ & \mathbf{0} & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

設 e_1 为 B_1^2 对应于特征根 $-k_1^2$ 的一个特征向量，又設

$$B_1e_1=f,$$

那末 f 必不为零向量(否則 $B_1^2e_1=0$)．因 B_1 为反称陣，所以还有 f 和 e_1 直交，此外还成立

$$B_1f=-k_1^2e_1.$$

因而

$$B_1^2f=-k_1^2f.$$

这表示 f 也为 B_1^2 的特征向量，不妨就取它的单位向量为基 e_2 (这时只要把 C 取得恰当就可以做到这一点)．又注意到这时的基仍为直交的，所以有(必要时可变換 e_1 和 e_2)

$$B_1e_1=ke_2, \quad B_1e_2=-ke_1.$$

再依同样方法取基 $e_3, e_4, \cdots$ (即适当改变直交陣 C)，我們就得到所要的結果．

根据引理 1，我們就能选取适当直交基使一已給的单参数旋轉群的李代数的基 (b_j^i)，具 (4·5·2) 的形状，其对应的单参数旋轉群的微分方程为

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\bar{x}^1}{dt}=k_1\bar{x}^2, && \frac{d\bar{x}^2}{dt}=-k_1\bar{x}^1,\\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots\\
&\frac{d\bar{x}^{2p-1}}{dt}=k_p\bar{x}^{2p}, && \frac{d\bar{x}^{2p}}{dt}=-k_p\bar{x}^{2p-1},\\
&\frac{d\bar{x}^{2p+1}}{dt}=0,\quad \cdots, && \frac{d\bar{x}^n}{dt}=0.
\end{aligned}
\tag{4·5·3}
$$

如把满足初始条件 $t=0$, $\bar{x}^i=x^i$ 的解記为 $\bar{x}^i=a^i_j(t)x^j$，那末

$$
(a^i_j(t))=\begin{pmatrix}
\cos k_1t & \sin k_1t & & & & & \\
-\sin k_1t & \cos k_1t & & & & & \\
 & & \ddots & & & & \\
 & & & \cos k_pt & \sin k_pt & & \\
 & & & -\sin k_pt & \cos k_pt & & \\
 & & & & & 1 & \\
 & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & 1
\end{pmatrix}. \tag{4·5·4}
$$

这就是单参数旋轉群的规范形式.

下面我們証明

定理 3 实不可約旋轉群的不变二阶共变对称張量除常数因子外符合于空間数量积的基本張量 g_{ij}.

【証】 如有 a_{ij} 为不变的二阶共变对称張量，則因 g_{ij} 为正定，所以

$$|a_{ij}-\lambda g_{ij}|=0$$

有实根 λ，因而

$$(a_{ij}-\lambda g_{ij})\mu^j=0$$

的实解 μ^i 构成子空間 K. 在旋轉群中某元素 (a^i_j) 的作用下，

$$\bar{a}_{ij}=a_{kl}\tilde{a}^k_i\tilde{a}^l_j,\quad \bar{g}_{ij}=g_{kl}\tilde{a}^k_i\tilde{a}^l_j,\quad \bar{\mu}^j=\mu^k a^j_k,$$

所以

$$(\bar{a}_{ij}-\lambda\bar{g}_{ij})\bar{\mu}^j=(a_{kl}\tilde{a}^k_i\tilde{a}^l_j-\lambda g_{kl}\tilde{a}^k_i\tilde{a}^l_j)\mu^m a^j_m$$

$$= (a_{kl} - \lambda g_{kl}) \mu^l \tilde{a}_i^k = 0.$$

由假設，a_{ij}, g_{ij} 在旋轉群下不变，所以 $\bar{a}_{ij} = a_{ij}$, $\bar{g}_{ij} = g_{ij}$，故有

$$(a_{ij} - \lambda g_{ij}) \bar{\mu}^j = 0.$$

可見 $\bar{\mu}^j \in K$，这样，K 是此旋轉群下的不变子空間．因它为实不可約，所以 K 为整个空間，$a_{ij} = \lambda g_{ij}$．

我們还要証明

定理 4　n 維空間实不可約旋轉群 G 如容有中核，則 $n = 2m$，中核为一維，且在适当基下，中核的李代数的生成元表为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4\cdot5\cdot5)$$

【証】　任取李代数 G' 的中核中的一个元素，并已取好直交基把它化成标准形式

$$(c_i^j) = \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & a & & & & & & \\ -a & 0 & & & & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & a & & & \\ & & & -a & 0 & & & \\ & \mathbf{0} & & & & 0 & b & \\ & & & & & -b & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \end{array}\right) \\ \underbrace{\hphantom{-a \quad 0 \quad \ddots \quad -a \quad 0}}_{2p} \end{array}$$

而且 $2p$ 列以下沒有等于 $\pm a$ 的非零元，这就是說，

$$c_2^1 = -c_1^2 = c_4^3 = -c_3^4 = \cdots = c_{2p}^{2p-1} = -c_{2p-1}^{2p} = a,$$

$$c_{2u}^{2u-1} = -c_{2u-1}^{2u} = b_u \neq \pm a \quad \left(u = p+1, \cdots, m = \left[\frac{n}{2}\right]\right),$$

其余的 $c_i^j=0$.

由于中核与其他元素可变换,故知 $(a_i^j)\in G'$, 于是成立

$$a_j^k c_i^j - c_j^k a_i^j = 0.$$

特别取 $i=2\alpha$, $k=2u$ $(\alpha=1, \cdots, p)$, 则有

$$a a_{2\alpha-1}^{2u} + b_u a_{2\alpha}^{2u-1} = 0;$$

取 $i=2\alpha-1$, $k=2u-1$, 则有

$$-a a_{2\alpha}^{2u-1} - b_u a_{2\alpha-1}^{2u} = 0.$$

但由 $a \neq \pm b_u$, 故得

$$a_{2\alpha}^{2u-1} = a_{2\alpha-1}^{2u} = 0.$$

同理

$$a_{2\alpha}^{2u} = a_{2\alpha-1}^{2u-1} = 0.$$

在 $n>2m+1$ 时,分别取 $i=2\alpha$, $k>2m$ 及 $i=2\alpha-1$, $k>2m$ 得

$$a_{2\alpha-1}^{k}=0, \quad a_{2\alpha}^{k}=0 \quad (k>2m).$$

由此可見 $e_1, \cdots, e_{2p}$ 构成不变平面. 但由于 G 实不可約,故必須有 $n=2m=2p$, 这表示 G' 的中心在特殊基下可化为

$$\begin{pmatrix} 0 & a & & & \\ -a & 0 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 0 & a \\ & & & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

如果 (b_j^i) 也属于 G' 的中心,则有 (b_j^i) 与 (c_j^i) 可交換,所以

$$b_k^i c_j^k - c_k^i b_j^k = 0,$$

这表示 $w_j^i = c_k^i b_j^k$ 为对称陣,但因 w_j^i 也可与 G' 交換,又 G' 为实不可約的,所以

$$c_k^i b_j^k = \lambda E,$$

所以

$$b_j^i = \lambda \tilde{c}_j^i \quad ((\tilde{c}_j^i) 为 (c_j^i) 的逆陣).$$

可見 (b_j^i) 同样具形状

$$\begin{pmatrix} 0 & b & & & \\ -b & 0 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 0 & b \\ & & & -b & 0 \end{pmatrix},$$

$b=-\frac{\lambda}{a}$，因而中核是一維的．中核由元素

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

所生成．

还要指出，任一旋轉群[1] G 如为可約，則其陣可以分解为較簡單的形狀．設 Π_1 为 G 的一个不变平面，可作它的直交补 Π_2，Π_2 也是 G 的不变平面．如 G 在 Π_1（或 Π_2）上仍然可約，則继續作这样的分解，到最后，空間必可选出直交基，使 G 中元素均具形状

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & A_1 & & & \\ & & & & A_2 & & \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & A_s \end{pmatrix}, \qquad (4\cdot5\cdot6)$$

这里的 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 均为直交陣，各构成在相应的子空間中的不可約旋轉群．还可把 $A_1, \cdots, A_s$ 依据它們是否等价[2] 而分

[1] 我們常把直交群了解为全直交群，又旋轉群指直交群或其子群．

[2] A_1 和 A_2 等价是指存在一个确定的非异直交陣 T，使 $A_2=TA_1T^{-1}$ 对群 G 中所有的元素成立．

成若干类，从而 G 中元素可表为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \mathbf{0} & & \\ & & & B_1 & & & & & & & & & \\ & & & & B_1 & & & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & & B_1 & & & & & & \\ & & & & & & & B_2 & & & & & \\ & & & & & & & & B_2 & & & & \\ & & & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & & & B_2 & & \\ & & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & \mathbf{0} & & & & & & & & & B_k \\ & & & & & & & & & & & & & B_k \\ & & & & & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & & & & & B_k \end{pmatrix} \tag{4·5·7}$$

的形状，$B_1, \cdots, B_k$ 均为直交陣，各构成在相应的子空間中的不可約旋轉群、又 B_r 和 B_s $(r \neq s)$ 不等价.

G 的李代数元素基可表为

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \mathbf{0} & & \\ & & 0 & & & & & & & & \\ & & & C_1 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & C_1 & & & & & \\ & & & & & & C_2 & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & \\ & & \mathbf{0} & & & & & & C_2 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & C_k \\ & & & & & & & & & & & C_k \\ & & & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & & & C_k \end{pmatrix}, \tag{4·5·8}$$

$C_1, \cdots, C_k$ 各属于 $B_1, \cdots, B_k$ 的李代数.

为了后文需要，我們在这里再叙述一个引理.

引理 2 (Schur) 設 Σ_1 和 Σ_2 各为 n 阶陣和 m 阶陣的集合，各为不可約的，又存在 $n\times m$ 陣 B，使对每一 $C_1\in\Sigma_1$，必存在

$C_2 \in \Sigma_2$，使

$$C_1 B = B C_2. \tag{4·5·9}$$

又对 Σ_2 中的任一 C_2，也必有 Σ_1 中的 C_1 使上式成立，那末只可能有两种情形：

(i) $B=0$;

(ii) $m=n$，B 为非异的.

【証】 設 $B \neq 0$. 把 Σ_1，Σ_2 看成作用于向量空間 P_n 和 P_m 的綫性变换，記 B 的列向量为 $b_1, \cdots, b_m$，它們为 P_n 的向量，生成 P_n 的一子空間 S. 从等式 (4·5·9) 可見 $b_1, \cdots, b_m$ 經 Σ_1 的变换后仍为 $b_1, \cdots, b_m$ 的綫性組合，从此可見 S 为 Σ_1 的不变子空間. 因 Σ_1 为不可約，$b_1, \cdots, b_m$ 不全为 0，則 S 为全空間 P_n，所以 $m \geqslant n$，B 的秩数为 n.

对等式(4·5·9)两边进行轉置还可推出

$$C_2' B' = B' C_1'. \tag{4·5·10}$$

依剛才同样的理由成立 $m \leqslant n$，B 的秩数为 m. 联合这两方面的結果，就成立 $m=n$，陣 B 为滿秩. 引理証毕.

§ 4·6 旋轉群的交換旋轉

在齐性 Riemann 空間的研究中，我們往往要求出和一已給旋轉群中的一切旋轉可交换的旋轉的全体，这一問題是可以徹底地予以解决的.

引理 1 設 Ω 为 n 維实向量空間的一个不可約綫性群，Σ 为和 Ω 中每一变换相交换的綫性变换的全体，則 Σ 只能是下述三种情形之一：

(i) Σ 同构于实数体；

(ii) Σ 同构于复数体；

(iii) Σ 同构于四元数体.

【証】 选好空間 R_n 的一組基，Ω，Σ 中的元素均用 n 阶方陣来表示．設 $A\in\Sigma$，$B\in\Sigma$，显然 $A+B\in\Sigma$，即 Σ 关于加法封閉．再設 $A\in\Sigma$，$A\neq 0$，要証明 A 为可逆．事实上，A 必须不以 0 为特征值，否則，具特征值 0 的向量的全体就会組成 Ω 的一个不变子空間，但 Ω 为不可約，A 又不等于 0，所以 A^{-1} 存在．依据关系式

$$CA=AC \quad (C\in\Omega,\ A\in\Sigma,\ A\neq 0),$$

可見

$$A^{-1}C=CA^{-1} \quad (C\in\Omega).$$

因此 $A^{-1}\in\Sigma$．此外，如 $A\in\Sigma$，$B\in\Sigma$，則对任意 $C\in\Omega$，成立

$$(AB)C=ACB=C(AB),$$

所以 Σ 关于乘法也为封閉．又 Σ 中显然包含形为 λE 的陣，因此 Σ 构成一体，而且包含了形为 λE 的陣所成的体（和实数体同构），依据 Frobenius 的著名定理——实数体的有限扩張必和实数体本身，复数体或四元数体之一同构，引理証明完毕（見 Понтрягин П. С. [1]）．

設 $C\in\Sigma$，显然也有 $\lambda C\in\Sigma$（λ 实数）．因此，如果我們要求 Ω 的所有的交換旋轉所成的群，因为复数体为两参数的，四元数体为四参数的，所以除平凡的情形外，这个群只可能是单参数的群或三参数的群．

引理 2 設 Ω 为不可約的旋轉群，且容有单参数的交換旋轉群，那末 $n=2m$，且可选适当的規范直交基，依 Ω 的李代数中元素可用矩陣

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \tag{4·6·1}$$

表示，式中的 A 为 m 阶反称陣，B 为 m 阶对称陣．

【証】 如此单参数旋轉群 G_1 已属于 Ω，那末 Ω 已有中核；

如果此单参数旋轉群不属于 Ω，那末 Ω 的元素和此单参数群的元素的乘积的全体就构成一个旋轉群，也容有中核，所以依 § 4·5 定理 4 可見，$n=2m$，且可选适当的規范直交基，使 G_1 的李代数由元素

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

生成，再改选基，容易見到，这一反称陣就化为

$$J=\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4·6·2)$$

因此 Ω 的李代数中的陣均和这一陣可以交换，設 Ω 中的李代数的陣为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

于此 A, B, C, D 均为 m 阶方陣，A, D 为反称，又 $C=-B'$[1]。依可换的条件，又有

$$A=D, \quad C=-B,$$

从此就得出引理的結論。

由第一章的討論及(4·6·1)式可知，具有非平凡可交换旋轉的不可約旋轉群必为复可約的．事实上，还可直接証明，如对一复不可約的方陣集合 Σ，和它相交换的陣必为 λE 的形状．为此，只須注意到相交换的陣 C 的对应于某一确定的特征值 λ 的特征向量的全体必为 Σ 的不变平面，因此就必須为全空間，所以

[1] B' 表 B 的轉置，后文中也將用此記号．

$C=\lambda E$.

如果我們选取群 Ω，其綫性李代数为具形状 (4·6·1) 的反称陣的全体所构成的，現在来驗証，这一直交子代数为不可約的，而且和它可交換的反称陣只有 (4·6·2) 及其和实数的乘积。为此，我們考察 m 維酉空間中的酉群，在規范直交基下，它是由满足

$$\overline{U}'U=E$$

的 m 阶复方陣組成，它的綫性李代数元素是由满足

$$\overline{V}'+V=0$$

的 m 阶陣构成，記 V 为

$$V=(a_q^p+ib_q^p) \quad (p,\ q=1,\ \cdots,\ m),$$

式中 a_q^p, b_q^p 均为实数，且满足

$$a_q^p+a_p^q=0, \quad b_q^p-b_p^q=0.$$

作 V 的实形态（見 §1·5），我們就得到形如 (4·6·1) 的陣，因此所論的群为 m 維酉群的实形态[1]。我們已經知道，任一单位向量可通过酉变换而化到任一其他的单位向量，所以在 n 維实綫性空間中群 Ω 也有此性质，因此 Ω 为不可約的。又設

$$\begin{pmatrix} C & D \\ -D' & F \end{pmatrix}$$

是和所有具形状 (4·6·1) 相交換的反称陣，取 $B=0$，由直接运算可得

$$AC=CA, \quad AD=DA, \quad AD'=D'A, \quad AF=FA.$$

因 A 为任意反称陣，C, F 必須为反称，所以 $C=F=0$，又必須有 $D=\lambda E$，所以和 Ω 相交換的旋轉确实只是由 (4·6·2) 所生成。

引理 3 在 $4p$ 維空間中陣

---

[1] 可以直接驗証，复綫性群的綫性李代数的实形态均为复綫性群的实形态的綫性李代数。

$$
\begin{pmatrix}
A & B & C & D \\
-B & A & D & -C \\
-C & -D & A & B \\
-D & C & -B & A
\end{pmatrix}
\tag{4·6·3}
$$

的全体构成一个不可約旋轉群 H 的李代数 H'，而 H 的交換旋轉为三参数的旋轉群 H^*，式中 A 为任意的 p 阶反称陣，B，C，D 为任意的 p 阶对称陣，又 H^* 的綫性李代数有基

$$
I_1=\begin{pmatrix} 0 & E_{2p} \\ -E_{2p} & 0 \end{pmatrix},\qquad
I_2=\begin{pmatrix} & & & E_p \\ & 0 & -E_p & \\ & E_p & & \\ -E_p & & 0 & \end{pmatrix},
$$

$$
I_3=\begin{pmatrix} 0 & E_p & & \\ -E_p & 0 & & 0 \\ & & 0 & -E_p \\ & 0 & E_p & 0 \end{pmatrix}.
\tag{4·6·4}
$$

【証】 通过直接計算就見到，陣(4·6·3)和 I_1，I_2，I_3 均可交換，因而(4·6·3)所生成的旋轉群的确具有三参数的交換旋轉，現在要驗証(4·6·3)所生成的旋轉群为不可約的． 为此，先注意到 I_1，I_2，I_3 滿足

$$
\begin{aligned}
&I_1^2=-E,\quad I_2^2=-E,\quad I_3^2=-E,\\
&I_1I_2=-I_2I_1=I_3,\quad I_2I_3=-I_3I_2=I_1,\\
&I_3I_1=-I_1I_3=I_2.
\end{aligned}
\tag{4·6·5}
$$

任取一单位向量 f，記

$$
I_1f=g,\quad I_2f=h,\quad I_3f=k.
$$

因 I_1，I_2，I_3 为反称，如用 (f, g) 記数量积，就有

$$
(f, g)=0,\quad (f, h)=0,\quad (f, k)=0.
$$

此外，

$$(g, g)=(I_1f, I_1f)=-(I_1^2f, f)=(f, f)=1.$$

同理有

$$(h, h)=1, \quad (k, k)=1.$$

又由(4·6·5)式可見

$$I_1h=k, \quad I_2k=g, \quad I_3g=h.$$

所以又有

$$(h, k)=0, \quad (g, h)=0, \quad (g, k)=0.$$

因此四个向量 f, g, h, k 为直交的，我們选基，使

$$f_1=f, \quad f_{2p+1}=g, \quad f_{p+1}=h, \quad f_{3p+1}=k.$$

再取和 f, g, h, k 相直交的任一单位向量为 f_2，而令

$$f_{2p+2}=I_1f_2, \quad f_{p+2}=I_2f_2, \quad f_{3p+2}=I_3f_2,$$

那末 $f_2, f_{p+2}, f_{2p+2}, f_{3p+2}$ 也是相互直交的单位向量．此外，由

$$(f_{2p+2}, f_1)=(I_1f_2, f_1)=-(f_2, I_1f_1)=-(f_2, f_{2p+1})=0$$

等式可見 $f_{2p+2}, f_{p+2}, f_{3p+2}$ 和 $f_1, f_{p+1}, f_{2p+1}, f_{3p+1}$ 均垂直，选 f_3 为任一和这些已作出的向量相直交的单位向量，继續依此步驟进行下去，我們就得空間的另一組規范直交基，在这組基下，I_1, I_2, I_3 的矩陣形式仍为(4·6·4)；容易驗証，和(4·6·4)相交換的反称陣的集合就是陣(4·6·3)的集合，因而依照新的基，李代数 H' 的矩陣仍为集合(4·6·3)．由于陣中第一列除第一元素必須为0外其余元素均为任意，所以 f_1 在群 H 中可依和 f_1 直交的任一方向运动，由于 f_1 为任一单位向量，从此可見 H 就是不可約的，因为在不变平面上的向量的运动方向总是有限制的．引理証毕．

注 矩陣集合(4·6·3)为 $2p$ 維复向量空間的陣

$$V=\begin{pmatrix} A-iC & B-iD \\ -B-iD & A+iC \end{pmatrix} \tag{4·6·6}$$

的实形态．这样的陣的集合实际上是酉代数和辛代数的交集，

因此群 H 为酉群和复辛群的交的实形态(称为酉辛群的实形态).

現証明

引理 4 設 K 为一空間 R_n 的实旋轉群，它是不可約的，又容有三参数的交换旋轉，那末 $n=4p$，K 必为酉辛群的实形态或其不可約子群，在适当的标形下，其交换旋轉群的李代数具形状(4·6·4).

【証】 設 J_1 为一个交换旋轉的李代数的陣，依 § 4·5 易見，可改变 J_1 的实常数因子，使

$$J_1^2=-E.$$

又設 J_2 为另一交换旋轉的李代数的陣，因 J_1J_2 和 K 中元素可交换，所以 $J_1J_2+J_2J_1$, $J_1J_2-J_2J_1$ 也和 K 中元素可交换. 但 $J_1J_2+J_2J_1$ 为对称陣，又 K 为不可約，所以 $J_1J_2+J_2J_1=\lambda E$. 以 $\mu\left(J_2+\frac{\lambda}{2}J_1\right)$ 代替 J_2，仍記它为 J_2，于此 μ 也为一个适当的实数，就成立

$$J_1J_2+J_2J_1=0,\quad J_2^2=-E.$$

因此又有

$$J_1J_2=-J_2J_1.$$

定义它为 J_3. 因

$$J_3'=(J_1J_2)'=J_2'J_1'=J_2J_1,$$

所以 J_3 是反称陣，也属于交换旋轉的李代数. 此外，

$$J_3^2=(J_1J_2)(-J_2J_1)=-E,$$

$$J_2J_3=-J_2J_2J_1=J_1,\quad J_3J_2=J_1J_2J_2=-J_1,$$

$$J_3J_1=-J_2J_1J_1=J_2,\quad J_1J_3=J_1J_1J_2=-J_2.$$

同时，J_1, J_2, J_3 为綫性无关的，因为如有

$$aJ_1+bJ_2+cJ_3=0,$$

則在两边作用 J_3 就有

$$-aJ_2+bJ_1-cE=0.$$

因为 J_1, J_2 为反称，所以只好有 $c=0$; 同样可証 $b=a=0$. 所以 J_1, J_2, J_3 綫性无关.

因 J_1, J_2, J_3 滿足引理 3 中 I_1, I_2, I_3 所滿足的 (4·6·5) 式，所以依引理 3 証明中的同一方法选空間的規范直交基，可見 n 必为 4 的倍数，使 J_1, J_2, J_3 也具表达式(4·6·4)，因而 K 的李代数也属于 H'. 引理証毕.

綜合以上的結果，我們有

定理 設 K 为 R_n 中的实不可約的旋轉群，如果它容有非平凡的交換旋轉，那末只可能有下列二种情形：

（i） K 容有单参数交換旋轉群，且为酉群的实形态的不可約子群；

（ii） K 容有三参数的交換旋轉，且为酉辛群的实形态的不可約子群.

注 适当改变定理的証明，K 为任何实不可約的綫性群时也会有相应的定理. 在适当坐标下，交換旋轉的形状仍然为(4·6·2)或(4·6·4)两种[1].

利用这一定理，也可以作出和任意的旋轉群相交換的矩陣的全体，为此，我們把已給旋轉群李代数的一般元素写作

$$C=\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \mathscr{C}_1 & & & 0 \\ & & \mathscr{C}_2 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \mathscr{C}_h \end{pmatrix} \qquad (4\cdot6\cdot7)$$

的形状，而 $\mathscr{C}_h$ 具形状

[1] 見 Obata, M. [1].

$$\mathscr{C}_h=\begin{pmatrix} C_h & & & 0 \\ & C_h & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_h \end{pmatrix} \quad (h=1,\ 2,\ \cdots,\ k), \qquad (4\cdot6\cdot8)$$

于此 C_h 构成不可約的李代数，又 C_h 和 $C_l(h\neq l)$ 为不等价的。把和 C 相交换的陣 A 写作

$$A=\begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & \cdots & A_{0k} \\ A_{10} & A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{k0} & A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix}, \qquad (4\cdot6\cdot9)$$

这里 A 的分块方式和 C 的分块方式(4·6·7)相同. 由 $AC=CA$ 就可知道

$$A_{01}\mathscr{C}_1=\cdots=A_{0k}\mathscr{C}_k=0,$$

$$\mathscr{C}_1A_{10}=\cdots=\mathscr{C}_kA_{k0}=0,$$

$$\begin{aligned} A_{ii}\mathscr{C}_i&=\mathscr{C}_iA_{ii}, \\ A_{ij}\mathscr{C}_j&=\mathscr{C}_iA_{ij}, \end{aligned} \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ k;\ i\neq j).$$

因为 $\mathscr{C}_1$ 不容有公共的零向量，所以由

$$\mathscr{C}_1A_{10}=0$$

就推出 $A_{10}=0$，再由 $(A_{01}\mathscr{C}_1)'=-\mathscr{C}_1A_{01}'=0$ 也推出 $A_{01}=0$，因此得

$$A_{01}=\cdots=A_{0k}=A_{k0}=\cdots=A_{kk}.$$

又依 $\mathscr{C}_1$ 和 $\mathscr{C}_2$ 的分块方法把 A_{12} 分块为

$$A_{12}=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix}$$

(B_{ab} 的列数和 C_2 的阶数相同，B_{ab} 的行数和 C_1 的阶数相同，又 s 为 $\mathscr{C}_2$ 中的 C_2 的个数，r 为 $\mathscr{C}_1$ 中的 C_1 的个数）. 由 $A_{12}\mathscr{C}_2$

$=\mathscr{C}_1A_{12}$ 就得

$$B_{ab}C_2=C_1B_{ab}.$$

但由于 C_2 和 C_1 不等价，所以由 § 4·5 引理 2，$B_{ab}=0$. 因此 $A_{12}=0$，所以

$$A_{ij}=0 \quad (i\neq j). \tag{4·6·10}$$

再决定 A_{11}, A_{22}, ⋯ 等等，为此，把 A_{11} 表为

$$A_{11}=\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1r} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{r1} & L_{r2} & \cdots & L_{rr} \end{pmatrix}. \tag{4·6·11}$$

$L_{uv}(u, v=1, \cdots, r)$ 和 C_1 的阶数相同，利用

$$A_{11}\mathscr{C}_1=\mathscr{C}_1A_{11},$$

就得

$$L_{uv}C_1=C_1L_{uv}, \tag{4·6·12}$$

因此 L_{uv} 就是和 C_1 可交换的陣，而这种陣的全体我們已經在上面的定理中决定好了，所以 A_{11} 也决定好了，同样 A_{22}, ⋯ 等等也都决定好了，所以 A 也决定好了．如果还对 A 添上对称或反称等要求，例如要求 A 为对称，那末 A_{11} 中的 L_{11}, L_{22}, ⋯, L_{aa} 必具形状 λE，而 L_{uv} 要选得使 $L'_{uv}=L_{uv}(u\neq v)$；A_{22}, ⋯ 等也仿此．又如要求A为反称，則 A_{11} 中的 L_{11}, ⋯, L_{rr} 在适当坐标下必为 I_1, I_2, I_3 的綫性組合，而 $L'_{uv}=-L_{uv}(u\neq v)$；A_{22}, ⋯ 等仿此．

后文中可以見到，这一代数上的結果对齐性 Riemann 空間的討論是十分有用的．

第五章　齐性空間的一般性质

§5·1 齐性空間

現在从另一角度来討論可迁的变换群，这样的討論可以引导出齐性空間的概念，并制訂出研究齐性空間的局部微分几何学的有用的工具.

設 G 为 r 維的局部李群，H 为它的 $r-n$ 維的子群($n\neq 0$)，那末 G 可以分解为关于 H 的左旁集之和. 左旁集的全体构成一个 n 維的空間，称它为齐性空間 G/H. 在第三章中已經証明[1]，可在群 G 中引入坐标 $x^1, \cdots, x^r$，使

$$x^i=\text{const} \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{5·1·1}$$

为左旁集. 特別，$x^i=0$ 为子群 H，这时，齐性空間的元素(左旁集)就有坐标(x^i).

群 G 在齐性空間中有它的表示. 設 gH 为 G/H 中的一般元素，$g_1\in G$，S_{g_1} 代表变换

$$S_{g_1}gH=g_1gH, \tag{5·1·2}$$

那末考察对应 $g_1\to S_{g_1}$，它滿足性质

[1] 那时是对右旁集証明的.

$$S_{g_2}\cdot S_{g_1}=S_{g_2g_1}, \qquad (5\cdot1\cdot3)$$

因此是一一表示．如前所見，在所选的坐标下，群 G 的乘法关系为

$$\begin{aligned}\bar{x}^i&=\varphi^i(u^\alpha,\ x^j),\\ \bar{x}^\beta&=\varphi^\beta(u^\alpha,\ x^\beta).\end{aligned} \qquad (5\cdot1\cdot4)$$

如記 x^i 为 gH 的坐标，u^α 为 g_1 的坐标，那末(5·1·4)的第一式就是(5·1·2)的解析表达式，而(5·1·3)就相应于

$$\varphi^i(v^\beta,\ \varphi^j(u^\alpha,\ x^k))=\varphi^i(\varphi^\alpha(v^\beta,\ u^\gamma),\ x^j). \qquad (5\cdot1\cdot5)$$

再研究表示 $g\to S_g$ 是同构的条件．成立

定理 表示 $g\to S_g$ 为同构的充要条件是除 e 外 H 不包含 G 的正常子群．

【証】 表示 $g\to S_g$ 的核的集合記为 K，这就是 $k\in K$ 意味着 $kgH=gH$ 对任何 $g\in G$ 成立．令 $g=e$，显見 $K\subset H$．又因 K 为同态核，所以 K 必为正常子群，因此，如除 e 外 H 不包含 G 的正常子群，則表示 $g\to S_g$ 为同构．另一方面，如 H 包含 G 的一个非平凡正常子群 K，則当 $k\in K$ 时 $g\in G$ 必有 $k_1\in K$，使 $kg=gk_1$，所以 $kgH=gk_1H=gH$，因而 S_k 对应恒等变换．所以，表示不为同构．定理証毕．

我們以后考慮齐性空間时总假定 G 在 G/H 中的表示为同构的，也就是 H 不包含 G 的非平凡的正常子群．

注 我們也可以利用右旁集的全体构成齐性空間，一切論述可以平行地进行．

例 1 我們把子群 H 取为 $\{e\}$，这时 gH 即为 g，而齐性空間即为群空間，(5·1·4)化为

$$\bar{x}^\alpha=\varphi^\alpha(u^\beta,\ x^\gamma). \qquad (5\cdot1\cdot6)$$

如記 $\tilde{\omega}^\alpha(x,\ dx)=A^\alpha_\beta(x)dx^\beta$ 为群的第一类不变形式，那末由(5·1·6)可知

$$\tilde{\omega}^\alpha(\bar{x},d\bar{x})=\tilde{\omega}^\alpha(u,\ du) \qquad (5\cdot1\cdot7)$$

成立，由此可見

$$d\bar{x}^{\alpha}=\widetilde{A}^{\alpha}_{\beta}\breve{\omega}^{\beta}(u,\ du),\tag{5·1·8}$$

式中 $\widetilde{A}^{\alpha}_{\beta}$ 为 (A^{α}_{β}) 的逆陣的元素，因此得到无穷小变换的微分算子的基为

$$X_{\beta}=\widetilde{A}^{\alpha}_{\beta}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}.\tag{5·1·9}$$

在一般的情况下，我們选取 $\breve{\omega}^{\alpha}$，使 $x^{i}=\text{const}$ 为 $\breve{\omega}^{i}=0$ 的初积分，(5·1·4)满足微分方程

$$\breve{\omega}^{\alpha}(\bar{x},\ d\bar{x})=\breve{\omega}^{\alpha}(u,\ du).$$

两边乘上 $\widetilde{A}^{i}_{\alpha}(\bar{x})$，关于 α 作和，

$$d\bar{x}^{i}=\widetilde{A}^{i}_{\alpha}(\bar{x})\breve{\omega}^{\alpha}(u,\ du).\tag{5·1·10}$$

另一方面，由于 $\bar{x}^{i}=\varphi^{i}(u^{\alpha},\ x^{j})$ 是变换群，所以

$$d\bar{x}^{i}=\xi^{i}_{\alpha}(\bar{x}^{j})\breve{\omega}^{\alpha}(u,\ du),\tag{5·1·11}$$

因此推出

$$\xi^{i}_{\alpha}(\varphi^{j}(u^{k},\ u^{p};\ x^{k}))\breve{\omega}^{\alpha}(u,\ du)$$
$$=\widetilde{A}^{i}_{\alpha}(\varphi^{j}(u^{k},\ u^{p};\ x^{k}),\ \varphi^{q}(u^{j},\ u^{p};\ x^{i},\ x^{p}))\breve{\omega}^{\alpha}(u,\ du).$$

特别，令 $u^{\alpha}=0$，du^{α} 取任意值，由于 $\varphi^{j}(0,\ 0;\ x^{k})=x^{j}$，$\varphi^{q}(0,\ 0;\ x^{j},\ x^{p})=x^{q}$，得

$$\xi^{i}_{\alpha}(x^{j})=\widetilde{A}^{i}_{\alpha}(x^{j},\ x^{p}),$$

因此 $\widetilde{A}^{i}_{\alpha}$ 不依赖于 x^{p}，而变换群的微分算子为

$$X_{\alpha}=\widetilde{A}^{i}_{\alpha}(x^{j})\frac{\partial}{\partial x^{i}}.\tag{5·1·12}$$

在齐性空間中，群 G 是可迁的变换群，这因为元素 $S_{g_{2}g_{1}^{-1}}$ 能把任一旁集 $g_{1}H$ 变为另一旁集 $g_{2}H$，这里的 g_{1}，g_{2} 都是 e 的适当的邻域中的任意的元素。

現考慮相反的問題：已給一个可迁的解析变换群

$$\bar{x}^{i}=f^{i}(x,\ u),\tag{5·1·13}$$

作用在变量 $(x^{1},\ \cdots,\ x^{n})$ 的一个区域 M 中，式中的 f^{i} 关于 x^{j}，u^{α}

都是解析函数．如所知，它是一个局部李群 G 的表示．在这变换群所作用的空間中选取一点，不妨取为 P_0:$(0, \cdots, 0)$，考察群中使这一点保持不变的变换，即由

$$f^i(0, u)=0$$

所定义的群 G 中的元素的集合，显然它是一个解析流形，又是一个子群，我們記它为 H.

作旁集 gH，如果 g 把点 P_0 变到点 P_1，那末这一旁集中的任意元素也有此性质．又設 P_1 为已給，那末依可迁群的定义，存在 G 的元素 g，它能把 P_0 变为 P_1．因此有一个旁集 gH，使其中的变换都能把点 P_0 变到 P_1．又如有两个旁集 g_1H，g_2H 都把点 P_0 变到 P，那末考察变换 $g_2^{-1}g_1$，它总把 P_0 仍变为 P_0，因此属于 H，所以 g_1H 和 g_2H 实际上是同一的旁集．因此，我們就得到結論：一个解析的可迁的变换群 G 所作用的空間可以解釋为由群 G 关于子群 H 的齐性空間．每点对应一个左旁集，群的变换就是群 G 表示于旁集 G/H 上的变换．

注 如果我們用其他一点 P 来代替 P_0，設 g 是群 G 中使点 P_0 到 P 的变换，那末 P 点的安定群就是 gHg^{-1}．事实上，群 gHg^{-1} 中的元素确乎使 P 不变，又設元素 g_1 使点 P 不变，那末 $g^{-1}g_1g$ 显然能使点 P_0 不变，即 $g^{-1}g_1g\subset H$ 或 $g_1\subset gHg^{-1}$，所以 gHg^{-1} 恰好是点 P 的安定群．因此不同的点的安定群是同构的．如果我們称子群 gHg^{-1} 和子群 H 为共轭的，那末还可以說：不同点的安定群是相互共轭的．

由此可見，把 M 表达成为齐性空間 G/H 的形状时，H 除了一个共轭关系之外是唯一确定的．

我們要指出点 P_0 的安定群的微分算子的作法．設

$$X_\alpha=\xi_\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

为群的微分算子李代数的基，由于群为可迁的，在 § 3·8 中已見到矩陣 $(\xi^i_\alpha(0))$ 的秩数必为 n，解方程

$$c^\alpha \xi^i_\alpha(0)=0,$$

它有 $r-n$ 組独立解 c^α_p $(p=n+1, \cdots, r)$，那末 $c^\alpha_p X_\alpha$ 就是点 P_0 的安定群的微分算子李代数的基．事实上，我們由方程

$$\frac{d\bar{x}^i}{dt}=\xi^i(\bar{x})$$

知道，如果 $\xi^i(x)=0$，那末以 $t=0$ 时 $\bar{x}^i=x^i$ 为初始条件的解只能是 $\bar{x}^i=x^i$，又如 $\xi^i(x)$ 不全为 0，則由 $\xi^i(x)$ 所生成的单参数变换群不能使点 x^i 保持不变．因此，由 $c^\alpha_p X_\alpha$ 所生成的群就是点 P_0 的安定群．

有时，我們还可以重新选取基 X_i, X_p，使 X_p 为 H 的微分算子李代数的基，X_p 就生成一个子代数，所以有 $c^i_{pq}=0$，即

$$[X_p, X_q]=c^s_{pq}X_s.$$

注 如果所給的可迁变换群并非解析的，但为充分光滑，例如 f^i 为 x, u 的 C^3 函数，又乘法关系也为 C^3 函数，那末依本节的叙述，我們仍然可以得到一个乘法关系为 C^3 的局部群 G 和 C^3 的子流形所成的子群 H，依 § 3·2, § 3·4 的討論，可以选取坐标 x^i, u^a，使这可迁变换群及乘法关系在这坐标下的表达式为解析的．

我們再考察下面的例子，并添加一些說明．

例 2 設 G 是 n 維实欧氏空間的运动群

$$\bar{x}^i=a^i_j x^j+b^i,$$

式中 (a^i_j) 为任意的直交陣，令 H 为子群

$$\bar{x}^i=a^i_j x^j,$$

那末 H 为点 $(0, \cdots, 0)$ 的安定群．設 $a^i_j(u^a)\left(a=n+1, \cdots, \frac{n(n+1)}{2}\right)$ 表示直交群元素的一个解析表达式，u^i 表示 b^i，那末

G 中元素有坐标 $u^\alpha\left(\alpha=1, 2, \cdots, \frac{n(n+1)}{2}=r\right)$, H 中元素的坐标为 $u^i=0$. 設 g 具坐标 $(u^1, \cdots, u^r)$，那末 gH 就把原点变为点 $(u^1, \cdots, u^n)$，因此点和左旁集成一一对应. 又点 $(u^1, \cdots, u^n)$ 的安定群为 gHg^{-1}，特别取 g 为变换

$$\bar{x}^i=x^i+u^i,$$

那末点 $(u^1, \cdots, u^n)$ 的安定群为

$$\bar{x}^i=a^i_j(x^j-u^j)+u^j.$$

从一个齐性空間有时还可以导出另一齐性空間. 例如，在例 2 中的 G 的作用下，欧氏空間的直綫是相互变化的，因此 G 可在欧氏空間的直綫全体所成的集合上有其表示. 取定一直綫 $x^2=x^3=\cdots=x^n=0$，考察群 G 中使这一直綫不变的变换的全体

$$\bar{x}^1=x^1+u^1, \quad \bar{x}^c=a^c_e x^e \quad (c, e=2, \cdots, n),$$

式中 (a^c_e) 为任意的 $n-1$ 阶的直交陣. 这种变换的全体显然成一群 H_1，因此我們就可以把 n 維欧氏空間的直綫的全体所成的空間抽象地了解为齐性空間 G/H_1. 用类似的方法便可从欧氏空間导出各种各样的齐性空間来.

古典的几何学(如射影空間的几何学、非欧几何学、共形几何学等等)依 F. Klein 的分类均可視为具有一可迁变换群的集合，因此可归入于齐性空間的范疇内. 依剛才的例子可以得到启示，从一已知的齐性空間又可作出新的齐性空間来.

利用已給的群及其子群也是制作齐性空間的一个具体的办法，例如取 G 为 n 阶非异方陣所成的一群，H 为它的一个子群(不包含 G 的正常子群)，那末就会得出齐性空間 G/H 来.

§5·2 相切空間. 迷向群

在 n 維空間 M 的任一点 P_0，作所有的切向量的集合，它們

构成一个 n 維的向量空間，称为相切空間，記为 T_n. 当空間 M 在点 P 的坐标系統 (x^i) 給好以后，相切空間的每一元素由其相应的反变支量所确定．具体地說：設 $x^i=x^i(t)$ 表示过 P_0 点的光滑曲綫，又 $t=0$ 对应于点 P_0，那末 $\left(\frac{dx^i}{dt}\right)_{t=0}$ 就是这根曲綫在参数 t 的表示下在点 P_0 的切向量的反变支量．以 I_j 表 T_n 中的第 j 支量为 1 其余支量为零的元素，n 个向量 $I_j (j=1,2,\cdots,n)$ 构成点 P_0 的相切空間的一个标形，称为附属于坐标系統 (x^i) 的自然标形．那末任一以 v^i 为支量的向量 v 可表示为

$$v=v^iI_i. \tag{5·2·1}$$

在坐标变换

$$\bar{x}^i=f^i(x^l)$$

之下，曲綫 $x^i=x^i(t)$ 的方程变为

$$\bar{x}^i=f^i(x^l(t)),$$

所以在 $(\bar{x}^i)$ 坐标系統下，切向量的支量变为

$$\left(\frac{d\bar{x}^i}{dt}\right)_0=\left(\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^j}\right)_P\left(\frac{dx^j}{dt}\right)_0. \tag{5·2·2}$$

記附属于坐标系統 $(\bar{x}^i)$ 的自然标形的基为 $\bar{I}_i$，由此就可見到，向量 I_i 可表达为

$$I_i=\left(\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^i}\right)_0\bar{I}_j, \tag{5·2·3}$$

因之也成立

$$\bar{I}_j=\left(\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^j}\right)_P I_i. \tag{5·2·4}$$

(5·2·3) 和 (5·2·4) 是自然标形的基在坐标变换下的公式．

在許多場合，对相切空間选取和坐标系統无关的基是很有好处的．具体地說，在 T_n 中选取 n 个綫性无关的向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，那末任一向量 v 又可表示为

$$v = w^i e_i, \tag{5·2·5}$$

这时的 e_i, w^i 均不因坐标变换而有所改变．如果在某一坐标系統下，

$$e_i = h_i^j I_j, \tag{5·2·6}$$

那末由

$$v = w^i h_i^j I_j = v^j I_j \tag{5·2·7}$$

可以得到

$$v^i = h_j^i w^j, \quad w^i = \bar{h}_j^i v^j, \tag{5·2·8}$$

这里 $\bar{h}_j^i$ 为 (h_j^i) 的逆陣的元素．

在 (x^i) 坐标系統下，以 dx^i 为反变支量的向量記为

$$dP = dx^i I_i. \tag{5·2·9}$$

依据微分的变换法则以及(5·2·3)式，我們有

$$dx^i I_i = d\bar{x}^i \bar{I}_i,$$

由此可見，dP 是和坐标选取无关的向量，在一个坐标系統之下，它由一組坐标微分所确定．自然，它应該随着坐标微分的改变而改变．

在一个坐标系統下，每点都有一个自然标形．我們也假設，在每一点又已选好一个不因坐标变换而改变的标形的基 $e_i(i=1, 2, \cdots, n)$．基 e_i 在下述意义下称为解析的（或充分光滑的）：它們在任一自然标形下的支量是坐标 x^i 的解析的（或充分光滑的）函数．如果在每一点 P 都給好一个微分 dx^i，那末依(5·2·9)和(5·2·8)就有

$$dP = \Omega^i(x, dx) e_i, \tag{5·2·10}$$

式中

$$\Omega^i(x, dx) = \bar{h}_j^i(x) dx^j \tag{5·2·11}$$

为 n 个独立的 Pfaff 式，dP 和 e_i 均和坐标选擇无关．在坐标 $(\bar{x}^i)$ 中，如記

$$dP = \Omega^i(\bar{x}, d\bar{x})e_i,$$

那末就成立

$$\Omega^i(x, dx) = \Omega^i(\bar{x}, d\bar{x}),$$

即，$\Omega^i(x, dx)$ 在坐标变换下其数值为不变．相反地，如果已給 n 个綫性无关且在坐标变换下数值不变的 Pfaff 式 $\Omega^i(x, dx)$，那末依

$$dP = \Omega^i(x, dx)e_i$$

可以在每一点决定相切空間的不变基 e_i．此外还应指出，如果 Ω^i 还依賴于某些参数 u^ρ，即 Ω^i 为 $\Omega^i(x, u, dx)$，那末由 $dP = \Omega^i(x, u, dx)e_i$ 也可以决定一个标形族，但这时每点的标形已不止一个，它們还依賴于参数 u^α．

現設

$$\bar{x}^i = f^i(x^j) \tag{5·2·12}$$

为空間的点变换，Jacobi 式 $\left|\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right|$ 不等于 0．如果在这变换下点 P 变为点 $\bar{P}$，过点 P 的曲綫 $x^i = \varphi^i(t)$ 变为曲綫

$$\bar{x}^i = f^i(\varphi^j(t)),$$

因此，这一曲綫在点 $\bar{P}$ 的切向量有支量

$$\left(\frac{d\bar{x}^i}{dt}\right)_{\bar{P}} = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_P \left(\frac{d\varphi^j}{dt}\right)_P. \tag{5·2·13}$$

利用这式于就可以定义 P 点的向量 $v^i I_i$ 在变换下的变换規則为

$$\bar{v}^i = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_P v^j, \tag{5·2·14}$$

式中 $\bar{v}^i$ 是变后向量关于点 $\bar{P}$ 的自然标形的支量．由此可見，在 M 中的任一非异的点变换就会誘导出变前点和变后点的相切空間的綫性对应(5·2·14)．特別，如变换(5·2·12)使点 P 不变，从(5·2·14)就产生出点 P 的相切空間自身到自身的綫性变换．

我們回到齐性空間来，$P_0(0, \cdots, 0)$ 是它的一个定点，H 是

点 P_0 的安定群，它的方程为

$$\bar{x}^i=g^i(u^p,\ x^j)\quad (p=n+1,\ \cdots,\ r).$$

依(5·2·13)，在 P_0 点的向量 dx^j 受到变换

$$d\bar{x}^i=\left(\frac{\partial g^i}{\partial x^j}\right)_0 dx^j, \tag{5·2·15}$$

这里的$\left(\frac{\partial g^i}{\partial x^j}\right)_0$中，$x^j$ 已用(0, …, 0)代入，而 u^p 可取任意数值。这样，安定群中以 u^p 为参数的元素对应于 P_0 点的相切空間中的綫性变换(5·2·15)．H 中两个元素的乘积变换可表为

$$\bar{x}^i=g^i(v,\ g(u,\ x)),$$

又因

$$0=g^i(u,\ 0),$$

所以

$$d\bar{x}^i=\left(\frac{\partial g^i(v,\ x)}{\partial x^l}\right)_0\left(\frac{\partial g^l(u,\ x)}{\partial x^j}\right)_0 dx^j,$$

因此，这个对应是同态．(5·2·15) 的全体构成相切空間上的一个綫性群，称为迷向群．

在齐性空間的每一点，都有一个迷向群，現問不同点的迷向群之間有什么关系？設

$$\bar{x}^i=f^i(x^j) \tag{5·2·16}$$

为 G 中的使点 P_0 变为点 P 的任一变换，又記

$$\bar{x}^i=\psi^i(x^j) \tag{5·2·17}$$

是它的逆变换，那末，依上节的論述，点 P 的安定群的方程可表为

$$\bar{x}^i=f^i(g(v,\ \psi(x))),$$

因此点 P 的迷向群中的元素可表为

$$d\bar{x}^i=\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^k}\right)_0\left(\frac{\partial g^k}{\partial x^l}\right)_0\left(\frac{\partial \psi^l}{\partial x^j}\right)_P dx^j, \tag{5·2·18}$$

式中的 $\left(\frac{\partial\psi^i}{\partial x^j}\right)_P$ 表示这一导数中的变量已用 P 点的坐标代入．由于 (5·2·17) 为 (5·2·16) 的逆变换，所以方陣 $\left(\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^k}\right)_0\right)$ 和 $\left(\left(\frac{\partial\psi^i}{\partial x^j}\right)_P\right)$ 是互逆的，由此可見，在不同的点的迷向群是同构的．从一点的迷向群到另一点的迷向群的同构对应可以利用方陣的相似而得到．

一般說来，安定群和迷向群未必是同构的，例如，我們考慮 n 維空間的射影变换群

$$\bar{x}^i=\frac{a^i_jx^j+b^i}{c_lx^l+1},\quad \det|a^i_j|\neq 0, \tag{5·2·19}$$

它是 $n(n+2)$ 参数的变换群，$(0,\ \cdots,\ 0)$ 点的安定群为

$$\bar{x}^i=\frac{a^i_jx^j}{c_lx^l+1}, \tag{5·2·20}$$

有 $n(n+1)$ 个参数，它的迷向群是

$$d\bar{x}^i=a^i_j\,dx^j, \tag{5·2·21}$$

它是完全綫性群，只有 n^2 个参数．

迷向群是一綫性群，当然可以依照一般的办法来制作它的綫性李代数．我們在下一节将会指出这个綫性李代数可以利用群的結构常数很快地制作出来．

§ 5·3 齐性空間的可容許标形族

在齐性空間 M 中，取点 P_0: $(0,\ \cdots,\ 0)$，在此点选取一个标形 $\underset{0}{R}$，其基为 $\underset{0}{e_i}$．已知群 G 的乘法关系为

$$\bar{x}^i=\varphi^i(u^\alpha,\ x^i),\quad \bar{x}^\rho=\varphi^\rho(u^\rho,\ x^\alpha), \tag{5·3·1}$$

而第一組方程就是 M 中的点变换的方程．在 § 5·2 已經見到，在以 u^α 为参数的变换下，标形 $\underset{0}{R}$ 也变为另一标形 $R(u^\alpha)$，由于

$$\varphi^i(u^\alpha,\ 0)=u^i, \tag{5·3·2}$$

所以 $R(u^\alpha)$ 是在点 $(u^1, \cdots, u^n)$ 的切空間中的一个标形. $R(u^\alpha)$ 的全体称为齐性空間的可容許标形族. 显然, 以 v 为参数的群中的变換把标形 $T(u)$ 变为标形 $T(w)$, 于此

$$w^\alpha = \varphi^\alpha(v, u).$$

这就說明,就整个标形族 $T(u^\alpha)$ 而言,在群 G 的变換下, 其中的标形是相互变換的,又群 G 是可迁地作用于集合 $T(u^\alpha)$ 的.

在点 $P:(x^i)$,我們考察向量 $dP=dx^iI_i$,参考于标形 $T(x^i,x^p)$ 的基 e_i, 就成立

$$dP = \Omega^i(x, dx)e_i, \tag{5·3·3}$$

式中的 Ω^i 是 n 个独立的 Pfaff 式,它們只包含微分 $dx^i(i=1, 2, \cdots, n)$, 但它的系数还依賴于 x^i 和 x^p, 这因为 e_i 是依賴于 x^i 和 x^p 的. 經过变换(5·3·1)后,点 (x^i) 变为 $(\bar{x}^i)$, 向量 dP 变为 $d\bar{P}$, e_i 变为 $\bar{e}_i$. 因为在点变換之下,相切空間的向量所遭受的变換是綫性变換, 所以它們之間的綫性关系不会发生变化, 因而我們仍有

$$d\bar{P} = \Omega^i(x, dx)\bar{e}_i.$$

但依定义,

$$d\bar{P} = \Omega^i(\bar{x}, d\bar{x})\bar{e}_i,$$

所以成立

$$\Omega^i(x, dx) = \Omega^i(\bar{x}, d\bar{x}).$$

这表示, $\Omega^i(x, dx)$ 构成群 G 的第二类不变微分形式的一部分, 且为独立的.

因 $\Omega^i(x, dx)$ 为微分 dx^j 的綫性組合,所以 Pfaff 方程

$$\Omega^i(u, du) = 0$$

为完全可积的,它的初积分为

$$u^i = \text{const}.$$

它們应該构成群 G 的一个子群和它的左旁集. 事实上, 由

(5·3·2)式可知，$u^i=0$ 所表示的子群中的元素使点(0, …, 0)不变，为这一点的安定群．又 $u^i=x^i$ 中的元素为使点(0, …, 0)变为点(x^i)的变換．因此它就代表使点(0, …, 0)变为点$(x^1, \cdots, x^n)$的左旁集．为了和以前所用的記号相符合，我們仍記 $\Omega^i(x, dx)$ 为 $\omega^i(x, dx)$，它为第二类的不变形式的完全組中的一部分．

可容許标形族和不变形式 $\omega^i(x, dx)$ 的决定依賴于在点 P_0 的初始标形 $\underset{0}{T}$ 的选擇．如果另选 $\underset{0}{T'}$ 以代替 $\underset{0}{T}$，設 $\underset{0}{T'}$ 的基 $\underset{0}{e'_i}$ 为

$$\underset{0}{e'_i}=l_i^j\underset{0}{e_j},$$

显然可見，我們得到另一个可容許标形族，其中的

$$e'_i=l_i^je_j,$$

又相应的

$$\omega'^i=\tilde{l}_j^i\omega^j.$$

特別，如选取 $\underset{0}{T}$ 的基 $\underset{0}{e_i}$ 为在点 P_0 的自然标形的基 $\underset{0}{I_i}$，由

$$dP=\omega^i(0, 0, dx)e_i=dx^i\underset{0}{I_i}$$

就可知道，如記

$$\omega^i(x, dx)=\tilde{b}_j^i\,dx^j,$$

那末就有

$$\tilde{b}_j^i(0)=\delta_j^i.$$

現在回到一般的情形，对 $\omega^i(x, dx)$ 再添上 $\omega^p(x, dx)$，使得 $\omega^\alpha(x, dx)$ 构成第二类不变形式的完全組，由于 $\omega^i=0$ 为完全可积，所以 Cartan-Maurer 方程可写成

$$D\omega^i=\frac{1}{2}c_{jk}^i[\omega^j, \omega^k]+c_{jp}^i[\omega^j, \omega^p], \qquad (5\cdot3\cdot4)$$

$$D\omega^p=\frac{1}{2}c_{jk}^p[\omega^j, \omega^k]+c_{jq}^p[\omega^j, \omega^q]+\frac{1}{2}c_{qs}^p[\omega^q, \omega^s] \qquad (5\cdot3\cdot5)$$

$$(i, j, k=1, 2, \cdots, n;\ p, q, s, t=n+1, \cdots, r),$$

式中的常数是群 G 的結构常数，它們常滿足 Jacobi 方程．由于

$c^i_{pq}=0$，所以这些方程具有較特殊的形式，我們以后时常要用到其中的：

$$c^i_{lp}c^l_{jq}-c^i_{lq}c^l_{jp}=c^s_{qp}c^i_{js}, \qquad (5\cdot3\cdot6)$$

$$c^k_{it}c^t_{mp}-c^k_{mt}c^t_{ip}=c^t_{im}c^k_{tp}+c^k_{it}c^t_{mp}-c^k_{tm}c^t_{ip}, \qquad (5\cdot3\cdot7)$$

$$c^k_{lt}c^t_{mh}+c^k_{mt}c^t_{hl}+c^k_{ht}c^t_{lm}=c^t_{lm}c^k_{th}+c^t_{mh}c^k_{tl}+c^t_{hl}c^k_{tm}. \qquad (5\cdot3\cdot8)$$

群的某些結构常数可以有明确的几何意义，我們現在先指出：P_0 点迷向群的李代数是由方陣 (c^i_{jp}) 所生成的（参考于基 $\underset{0}{e_i}$）[1]。

考察 P_0 点的安定群的无穷小变换，它对应于参数 $u^i=0$，$u^p=\delta x^p$（为无穷小量）．在这变换下，$\underset{0}{e_i}$ 变为 $\underset{0}{e_i}+\delta e_i$，那末

$$dP=\omega^i(0,\ 0,\ dx)\underset{0}{e_i}=\omega^i(0,\ \delta x^p,\ dx)(\underset{0}{e_i}+\delta\underset{0}{e_i}),$$

仍記

$$\omega^i(x,\ dx)=\tilde{b}^i_j(x)dx^j,$$

从上式就推出

$$\delta e_i=-b^k_i(0,\ 0)\left(\frac{\partial\tilde{b}^i_j}{\partial x^p}\right)_0\delta x^p\underset{0}{e_i},$$

但 δx^p 的高阶无穷小已經略去．另一方面，在 Cartan-Maurer 方程(5·3·4)中置 $\delta x^i=0$，$\delta x^p=\delta x^p$，$x^i=0$，$x^p=0$，我們有

$$\left(\frac{\partial\tilde{b}^i_j}{\partial x^p}\right)_0\delta x^p dx^j=c^i_{jp}b^j_l(0,\ 0)dx^l\omega^p(\delta),$$

从此可見

$$b^k_i(0,\ 0)\left(\frac{\partial\tilde{b}^i_j}{\partial x^p}\right)_0\delta x^p=c^i_{jp}\omega^p(\delta),$$

所以

$$\delta e_i=-c^i_{jp}\omega^p(\delta)\underset{0}{e_i}.$$

由这一式子就得到了所需要的結論．这时所参考的标形为

[1] 見 Cartan E. [1].

$(0, \cdots, 0)$点的 $\underset{0}{e}_i$. 特别，当迷向群和安定群同构时，迷向群的李代数也为 $r-n$ 維的，所以 (c^i_{jp}) 就成为迷向群的綫性李代数的基.

我們得到

定理　在标形 $\underset{0}{e}_i$ 之下，結构常数所成的方陣 $C_p=(c^i_{jp})$ 生成点 P_0 的迷向群的綫性李代数，当迷向群和安定群同构时，C_p 就是綫性李代数的基.

§ 5·4　非素性的齐性空間、齐性空間的直积

在一齐性空間 M 中，如果存在一系 $n-a$ 維 $(0<a<n)$ 曲面 V_{n-a}:

$$F_\sigma(x^1, \cdots, x^n)=c_\sigma \quad (\sigma=1, 2, \cdots, a), \tag{5·4·1}$$

式中的 F_σ 为解析函数，矩陣 $\left(\frac{\partial F_\sigma}{\partial x^i}\right)$ 的秩数为 a，使在群 G 的变换下，这些 V_{n-a} 整个地相互变换，那末就称齐性空間 M 为非素性的，V_{n-a} 称为非素性集.

在 M 中选取坐标，使 V_{n-a} 的方程为

$$x^{i'}=c^{i'} \quad (i'=1, 2, \cdots, a), \tag{5·4·2}$$

那末群 G 的变换就采取形式

$$\begin{aligned} \bar{x}^{i'}&=f^{i'}(x^{j'}), \\ \bar{x}^{i''}&=f^{i''}(x^{j'}, x^{j''}) \quad (i'', j''=a+1, \cdots, n). \end{aligned} \tag{5·4·3}$$

由此幷可見到，相切空間中具形状

$$dx^{i'}=0$$

的平面（即 V_{n-a} 的切平面）为迷向群的不变平面. 再选取可容許标形族，使初始标形 $\underset{0}{T}$ 符合于 P_0 点的自然标形，那末，因为由 $\underset{0}{e}_{i''}$ 所成的平面为迷向群的不变平面，所以結构常数满足条件

$$c^{i'}_{j''p}=0. \tag{5·4·4}$$

此外，依据所說的条件，群的乘法关系中的 $\varphi^{i'}(u, x)$ 只和 $x^{i'}$ 有关，因此 $u^{i'}=0$ 定义了 G 的子群，$x^{i'}=\text{const}$ 为該群的左旁集，因而

$$\omega^{i'}=0 \tag{5·4·5}$$

为完全可积，因此，同时也还成立

$$c^{i'}_{j''k''}=0. \tag{5·4·6}$$

显然，方程(5·4·5)所决定的子群包含了某些点的安定群．相反地，如果在齐性空間 G/H 中，存在包含一点的安定群 H 的 $r-n+a$ 維子群 $(0<a<n)$，那末必可选取 ω^i，使 $\omega^i=0$ 确定子群 H(及其旁集)，$\omega^{i'}=0$ 确定子群 H_1(及其旁集)．如把 $\omega^{i'}=0$ 的初积分取为 $x^{i'}$，那末 $x^{i'}=\text{const}$ 就是一系非素性集．总之，我們有

定理 1 齐性空間 G/H 为非素性的充要条件是存在子群 H_1，使 $H_1\supset H$．又非素性空間的迷向群必为可約的．

齐性空間若不是非素性的，那末就称它为素性的．

依迷向群的性质来决定齐性空間的性质是十分有意义的，下面的一些定理是属于这些方面的．

首先注意到，如 P_0 点的迷向群有一不变平面 $\underset{0}{E}_{n-a}$，那末就可选取可容許标形族，使初始标形中 $\underset{0}{e}_{i''}$ 相切于 $\underset{0}{E}_{n-a}$，經过群的变换，在每点都有一个平面 E_{n-a}，它們由向量 $e_{i''}$ 所生成，因而是 $\underset{0}{E}_{n-a}$ 所变来的，也是迷向群的不变平面．这个不变平面实际上是由方程

$$\omega^{i'}(x, dx)=0 \tag{5·4·7}$$

代数地定义出来的．这就是，在每点 (x^i)，方程(5·4·7)可以看成为关于 dx^i 的代数方程，滿足这个方程的 dx^i 全体就組成了 E_{n-a}.

定理 2 如齐性空間 G/H 的迷向群有不变平面 $E_{n-a}(0<a<n)$，它是由該群的所有的不变向量所組成，那末空間为非素性的，存在着一系和 E_{n-a} 相切的 $n-a$ 維的非素性集．

【証】 选取初始标形，使基向量中的 $\underset{0}{e}_{i''}$ 都是不变向量，那末成立

$$c^{i}_{j''p}=0. \tag{5·4·8}$$

在(5·3·7)中，令 $l=l''$, $m=m''$，注意到(5·4·8)后就得出

$$c^{k}_{ip}c^{i}_{l''m''}=0,$$

或

$$c^{k}_{i'p}c^{i'}_{l''m''}=0.$$

由此式就应該得出 $c^{i'}_{l''m''}=0$，因若方程 $c^{k}_{i'p}c^{i'}=0$ 有非平凡解 $c^{i'}$，那末，$c^{i'}\underset{0}{e}_{i'}$ 也就是 P_0 点的迷向群的一个不变向量，这和 $\underset{0}{e}_{i''}$ 构成独立的不变向量全体所成的子空間的基相矛盾．从 $c^{i'}_{l''m''}=0$ 及(5·4·8)式，就可知道方程

$$\omega^{i'}(x, dx)=0$$

为完全可积的，积分曲面为 $n-a$ 維，且处处和 E_{n-a} 相切．

还成立如下的

定理 3 設空間 G/H 的迷向群具有 $n-a$ 維不变平面 E_{n-q}，又迷向群包含一个放大

$$d\bar{x}^{i}=\sigma dx^{i} \quad (\sigma \text{ 任意常数}),$$

那末空間为非素性的；又平面場 E_{n-q} 切于一族非素性集．

【証】 选取初始标形，使 $\underset{0}{e}_{i''}$ 在不变平面上，那末就有

$$c^{i'}_{j''p}=0, \tag{5·4·9}$$

因为迷向群包含放大，故不妨設

$$c^{i}_{jr}=\delta^{i}_{j}. \tag{5·4·10}$$

在(5·3·7)式中令 $k=k'$, $l=l''$, $m=m''$, $p=r$，就会得出

$$c^{k'}_{l''m''}=0. \tag{5·4·11}$$

由(5·4·9)，(5·4·11)就推出 $\omega^{k'}=0$ 为完全可积，定理証毕.

如果齐性空間中有两系非素性集，它們的維数各为 $n-a$ 和 a，而且切平面只有零向量相公共，那末称空間为完全非素性. 这时，必可选取适当的坐标系統，使群中的变换具形状

$$\bar{x}^{i'}=f^{i'}(x^{j'}),\quad \bar{x}^{i''}=f^{i''}(x^{j''}).\tag{5·4·12}$$

剛才所証明的結果可推出

推論　如果齐性空間 G/H 的迷向群为完全可約，且包含有放大，那末空間就是完全非素性的.

我們再指出一項和此有关的事实. 設 G_1/H_1 和 G_2/H_2 是两个齐性空間，作群 G_1 和 G_2 的直积[1]，得到群 $G_1\times G_2$，又 $H_1\times H_2$ 为其子群，作齐性空間 $G_1\times G_2/H_1\times H_2$，我們称它为齐性空間 G_1/H_1 和 G_2/H_2 的直积.

先引入一个有用的定义：設 $C_p=(c^i_{jp})$ 为某一綫性李代数的一組基，如果关于一組未知数 l^p_k 的方程組

$$c^i_{jp}l^p_k-c^i_{kp}l^p_j=0\tag{5·4·13}$$

只有非平凡解，那末这綫性李代数(及相应的綫性群)便称为不可延拓的[2].

我們先証明如下的事实：設一齐性空間 G/H 的迷向群为不可延拓的，那末迷向群和安定群必同构. 事实上，若迷向群和安定群不同构，則可选取群 G 的不变形式 ω^i，ω^{p_1}，ω^{p_1} 使

$$D\omega^i=\frac{1}{2}c^i_{jk}[\omega^j,\ \omega^k]+c^i_{jp_1}[\omega^j,\ \omega^{p_1}],\tag{5·4·14}$$

$C_{p_1}=(c^i_{jp_1})$ 为迷向群的綫性代数的基. 由于 Pfaff 式 ω^i 的特征系統(見 §2·4)为

---

[1] 群 G_1 和 G_2 的直积是指元素 $(g_1,\ g_2)$ 的集合 $(g_1\in G_1,\ g_2\in G_2)$，且依 $(g_1,\ g_2)\cdot(h_1,\ h_2)=(g_1h_1,\ g_2h_2)$ 来定义乘法关系.

[2] (5·4·13) 在 E. Cartan 的关于无限連續群的著作中已多次地用到 (見 Cartan E. [1])，我們这里利用它来作为研究齐性空間的一个工具.

$$\omega^i=0, \quad \omega^{p_1}=0. \qquad (5\cdot4\cdot15)$$

所以这一系統完全可积，令其初积分为 x^i, x^{p_1}. ω^i 可用 x^i, x^{p_1} 和 dx^i 表示，令 x^{p_1} 为群的余下来的一些参数．在 (5·4·15) 中令 $x^{p_1}=0$，我們得

$$D\omega^i=\frac{1}{2}c^i_{jk}[\omega^j, \omega^k]+c^i_{jp_1}[\omega^j, \underset{0}{\omega}^{p_1}],$$

这里的 ω^j 和 $D\omega^j$ 均不改变(因它們不依賴于 x^{p_1})，而 $\underset{0}{\omega}^{p_1}$ 由 ω^{p_1} 中置 $x^{p_1}=0$ 所得．因此

$$c^i_{jp_1}[\omega^j, \omega^{p_1}-\underset{0}{\omega}^{p_1}]=0.$$

如記 $\omega^{p_1}-\underset{0}{\omega}^{p_1}=l^{p_1}_k\omega^k+l^{p_1}_{q_1}\omega^{q_1}$ 而代入，我們得

$$c^i_{jp_1}l^{p_1}_{q_1}=0,$$
$$c^i_{jp_1}l^{p_1}_k-c^i_{kp_1}l^{p_1}_j=0.$$

因为 C_{p_1} 为基，所以 $l^{p_1}_{q_1}=0$. 由于迷向群 $c^i_{jp_1}$ 为不可延拓，所以 $l^{p_1}_j=0$，此即

$$\omega^{p_1}=\underset{0}{\omega}^{p_1},$$

因此 ω^{p_1} 和 x^{p_1} 无关．所以我們有 $D\omega^{p_1}$ 可用 ω^j, ω^{q_1} 来表示．因此

$$\omega^i=0, \quad \omega^{p_1}=0$$

决定了一个包含在 H 中的正常子群．但这是不許可的，因此迷向群必和安定群同构．

不可延拓的綫性群是很多的，例如全直交群就是不可延拓的．事实上，我們如取全直交群的李代数的基为

$$c^i_{j(lm)}=\delta^i_l\delta_{jm}-\delta^i_m\delta_{jl} \quad (l>m), \qquad (5\cdot4\cdot16)$$

这时方程(5·4·13)就成为

$$c^i_{j(lm)}l^{(lm)}_k-c^i_{k(lm)}l^{(lm)}_j=0 \quad (\text{关于 } lm \text{ 作和，但 } l>m). \quad (5\cdot4\cdot17)$$

我們定义

$$\left.\begin{aligned}c^i_{j(lm)}&=-c^i_{j(ml)},\\ l^{(lm)}_j&=-l^{(ml)}_j,\end{aligned}\right\} \quad (l\leqslant m), \qquad (5\cdot4\cdot18)$$

則(5·4·17)可写成

$$c^i_{j(lm)}l^{(lm)}_k-c^i_{k(lm)}l^{(lm)}_j=0\quad(\text{关于 } lm \text{ 作和}).\qquad(5\cdot4\cdot17')$$

将(5·4·16)代入上式,幷利用(5·4·18)就可得到

$$l^{(ij)}_k+l^{(ki)}_j=0.$$

将这个式子与

$$l^{(jk)}_i+l^{(ij)}_k=0,$$

$$l^{(kj)}_i+l^{(ik)}_j=0$$

相加,就得到

$$l^{(ij)}_k=0.$$

因而(5·4·17)只有零解,全直交群为不可延拓的. 此外,不可延拓的綫性群 G 的任何子群都是不可延拓的, 因設 $c^i_{jp}(p=1,\cdots,r)$是 G 的李代数的基, $c^i_{jp_1}(p_1=1,\cdots,r_1)$ 是于群 G_1的李代数的基,如果 G_1 可以延拓,則

$$c^i_{jp_1}l^{p_1}_k-c^i_{kp_1}l^{p_1}_j=0\quad(p_1=1,\cdots,r_1)$$

有非平凡解 $\underset{1}{l}{}^{p_1}_k$, 取 $l^{p_1}_k=\underset{1}{l}{}^{p_1}_k$, $l^{p_2}_k=0\ (p_2=r_1+1,\cdots,r)$, 它就是(5·4·13) 的非平凡解, 这与群 G 的不可延拓性相矛盾. 因此, 任何旋轉群也必然为不可延拓的.

附带指出,一变换群的迷向群与安定群同构时,迷向群未必为不可延拓的. 例如,对非齐次的綫性变换

$$\bar{x}^i=a^i_jx^j+c^i$$

的全体来說 ((a^i_j)可取任意的非异陣), 迷向群和安定群为同构的, 它們都是完全綫性群, 容易驗証, 完全綫性群不是一个不可延拓的綫性群.

綫性群的不可延拓性对齐性空間和它一般的变换群的研究是十分有益的,我們現在引入这个概念是要証明

定理 4 設齐性空間 G/H 的迷向群为不可延拓, 且满足条件:

(i) 迷向群分解为两个綫性群的直积，它們各自独立地作用于互补的子空間中；

(ii) 迷向群无不变的非零的反变向量；

(iii) 迷向群无不变的非零的共变向量，

那末空間 G/H 分解为两个齐性空間的直积.

【証】 設迷向群分解为在两互补的平面 E_a 和 E_{n-a} 上的綫性群的直积，选取初始标形，使 $\underset{0}{e}_{i'}$ 在 E_a 上，$\underset{0}{e}_{i''}$ 在 E_{n-a} 上. 因迷向群为不可延拓，故和安定群同构，所以 $C_p=(c^i_{jp})$ 就是迷向群的李代数的基，再考虑到迷向群分为直积，所以可选擇 ω^p，使得 C_p 分为两类：

$$C_{p'}=\begin{pmatrix} c^{i'}_{j'p'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad C_{p''}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c^{i''}_{j''p''} \end{pmatrix} \tag{5·4·19}$$

$$(p'=n+1,\ \cdots,\ n+\lambda;\quad p''=n+\lambda+1,\ \cdots,\ r).$$

这就是說 c^i_{jp} 中除了 $c^{i'}_{j'p'}$ 和 $c^{i''}_{j''p''}$ 外一概为零.

在(5·3·7)中置 $p=p'$, $k=k'$, $l=l''$, $m=m''$, 得

$$c^{i'}_{l''m''}c^{k'}_{i'p'}=0.$$

由于迷向群无非零的不变向量，所以由这式子就得出

$$c^{i'}_{l''m''}=0. \tag{5·4·20}$$

同理有

$$c^{i''}_{l'm'}=0. \tag{5·4·21}$$

又在(5·3·7)中置 $p=p''$, $k=k'$, $l=l'$, $m=m''$, 我們得

$$c^{k'}_{l'i'}c^{i'}_{m''p''}=c^{i''}_{m''p''}c^{k'}_{l'i''},$$

由此可見，存在常数 $l^{p'}_{i''}$，使

$$c^{k'}_{l'i''}=l^{p'}_{i''}c^{k'}_{l'p'}; \tag{5·4·22}$$

同理还有常数 $l^{p''}_{i'}$，使

$$c^{k''}_{l''i'}=l^{p''}_{i'}c^{k'}_{l'p''}. \tag{5·4·23}$$

再置

$$\overline{\omega}^{p'}=\omega^{p'}+l^{p'}_{k''}\omega^{k''},\quad \overline{\omega}^{p''}=\omega^{p''}+l^{p''}_{k'}\omega^{k'},\qquad (5\cdot4\cdot24)$$

仍然把 $\overline{\omega}^{p'}$ 和 $\overline{\omega}^{p''}$ 記为 $\omega^{p'}$, $\omega^{p''}$, 那末 Cartan-Maurer 方程可写为

$$\left.\begin{aligned} D\omega^{i'}&=\frac{1}{2}c^{i'}_{j'k'}[\omega^{j'},\ \omega^{k'}]+c^{i'}_{j'p'}[\omega^{j'},\ \omega^{p'}],\\ D\omega^{i''}&=\frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}[\omega^{j''},\ \omega^{k''}]+c^{i''}_{j''p''}[\omega^{j''},\ \omega^{p''}].\end{aligned}\right\}\qquad(5\cdot4\cdot25)$$

由于迷向群为不可延拓,所以由方程

$$\omega^{i'}=0,\qquad \omega^{p'}=0$$

和

$$\omega^{i''}=0,\quad \omega^{p''}=0$$

分别定义了群 G 的两个正常子群 G_1, G_2, 在适当选取的参数和坐标下,群 G 的方程可书为

$$\begin{aligned}\bar{x}^{i'}&=\varphi^{i'}(u^{l'},\ u^{p'};\ x^{j'}),\qquad \bar{x}^{p'}=\varphi^{p'}(u^{l'},\ u^{p'};\ x^{j'},\ x^{q'}),\\ \bar{x}^{i''}&=\varphi^{i''}(u^{l''},\ u^{p''};\ x^{j''}),\quad \bar{x}^{p''}=\varphi^{p''}(u^{l''},\ u^{p''};\ x^{j''},\ x^{q''}).\end{aligned}$$

由此可見 G 是 G_1 和 G_2 的直积, 又令 H_1 为 G_1 的子群 $u^{i'}=0$, H_2 为 G_2 的子群 $u^{i''}=0$, 这样就得出齐性空間 G/H 是 G/H_1 和 G_2/H_2 的直积的結論.

本节中的一些定理可以对更一般的变换群(无限連續变换群)有效. 定理 2 是 Cartan E. 的一个結果的特殊情形(見 Cartan E. [1]),又一般的对連續变换群,定理 3, 定理 4 分别見于胡和生[1],谷超豪[2],[4].

注 1 定理 4 的条件(ii)可换作迷向群无不变的非零的二阶共变反称張量或迷向群在某一平面(E_a 或 E_{n-a})上旣无不变的非零的二阶共变反称張量也无不变的非零的反变向量. 事实上,条件(ii)是用来推出(5·4·20)式的,如果迷向群在 E_{n-a} 上无不变的非零的反称共变張量,那末在(5·3·7)中置 $p=p''$, $k=k'$, $l=l''$, $m=m''$ 就得到

$$c^{k'}_{i''l''}c^{i''}_{m''p''}-c^{k'}_{l''m''}c^{i''}_{l''p''}=0,$$

从此也能推出(5·4·20)式.

注 2 由 (5·4·25) 推出群 G 有两个正常子群 G_1, G_2 这一事实是下面更一般的事项的推論：設 ω^i,ω^ρ 是一組独立的 Pfaff 式，成立

$$D\omega^i=\frac{1}{2}c^i_{jk}[\omega^j,\ \omega^k]+c^i_{j\rho}[\omega^j,\ \omega^\rho],\qquad(5\cdot4\cdot26)$$

式中 c^i_{jk}, $c^i_{j\rho}$ 为常数，$C_\rho=(c^i_{j\rho})$为一个不可延拓的綫性李代数的基，則 $D\omega^\rho$ 可用 ω^i, ω^ρ 表达．事实上，設 ω^i, ω^ρ, ω^p 为一組独立的 Pfaff 式，其数目和所論空間的自变量的数目一样．設

$$\begin{aligned}D\omega^\rho=&\frac{1}{2}c^\rho_{jk}[\omega^j,\ \omega^k]+\frac{1}{2}c^\rho_{i\sigma}[\omega^i,\ \omega^\sigma]\\&+\frac{1}{2}c^\rho_{\sigma\tau}[\omega^\sigma,\ \omega^\tau]+c^\rho_{jp}[\omega^j,\ \omega^p]\\&+c^\rho_{\sigma p}[\omega^\sigma,\ \omega^p]+\frac{1}{2}c^\rho_{pq}[\omega^p,\ \omega^q].\end{aligned}\qquad(5\cdot4\cdot27)$$

把(5·4·26)外微分一次，左边为 $D^2\omega^i=0$，右边利用(5·4·27)代入，考察$[\omega^j,\ \omega^k,\ \omega^p]$，$[\omega^j,\ \omega^\sigma,\ \omega^p]$，$[\omega^j,\ \omega^p,\ \omega^q]$等項的系数，就得到

$$c^i_{j\rho}c^\rho_{kp}-c^i_{k\rho}c^\rho_{jp}=0,\qquad(5\cdot4\cdot28)$$

$$c^i_{j\rho}c^\rho_{\sigma p}=0,\qquad(5\cdot4\cdot29)$$

$$c^i_{j\rho}c^\rho_{pq}=0,\qquad(5\cdot4\cdot30)$$

利用 (5·4·29) 和 (5·4·30)立即推出 $c^\rho_{\sigma p}=0$, $c^\rho_{pq}=0$，这因为 C_ρ 为綫性无关的．由于$(c^i_{j\rho})$为不可延拓李代数的基，因此方程

$$c^i_{j\rho}l^\rho_k-c^i_{k\rho}l^\rho_j=0$$

只有零解，所以由(5·4·28)推出 $c^\rho_{kp}=0$，这样，由(5·4·27)就知道，$D\omega^\rho$ 可由 ω^i, ω^ρ 表示.

§5·5 在李代数中表示齐性空間的相切空間. 化約的齐性空間

由于齐性空間是由群 G 及子群 H 所确定，所以齐性空間的局部理論的研究就可以归入于李代数的研究. 現設 G/H 为一齐性空間，G 与 H 所对应的李代数分别为 G' 与 H'，設 G' 的基选取为 X_i, X_p，其中 $X_p \in H'$，那末 X_p 可解釋为 G/H 在点 eH 的安定群的微分算子. 我們現在要把相切空間在 G' 中表示出来，为此，定义李代数中的元素依子代数 H 的同余关系. 設 $X \in G'$, $Y \in G'$，且 $X-Y \in H'$，則称 X 与 Y 关于 H' 属于同一同余类. 同余类的集合构成一个 n 維的綫性空間，記作 Σ.

如前所述，对 G' 可作它的內微分代数，特别取 $X \in H'$ 时，綫性变换 A_X 全体构成內微分代数的子代数，相应地产生一綫性群，为綫性伴随群的子群，記作 $\bar{H}$. 子群 $\bar{H}$ 可視为作用于同余类空間 Σ 中的綫性群. 事实上，設

$$X = Y + c^p X_p,$$

則

$$[X_q, X] = [X_q, Y] + c^p [X_q, X_p] \equiv [X_q, Y] \pmod{H'},$$

所以 H' 中元素就对应于 Σ 中元素間的綫性变换. $\bar{H}$ 可看成作用在 Σ 中的綫性变换群，并且由于

$$[X_q, X_i] = c_{qi}^j X_j + c_{qp}^s X_s \equiv c_{qi}^j X_j \pmod{H'},$$

$\bar{H}$ 所对应的李代数的基就是 eH 点迷向群所对应的綫性李代数的基，因此，如果把 Σ 看成齐性空間 G/H 在 eH 点的相切空間，那末 $\bar{H}$ 就对应于迷向群. 这說明了齐性空間 G/H 的迷向群与綫性伴随群 $\bar{H}$ 有着密切的联系. 总之，我們可以把綫性伴随群的子群 $\bar{H}$ 看作迷向群，同余类空間 Σ 看成相切空間.

相切空間一般不能用李代数中的一个平面来表示，但是一

个齐性空間 G/H，如果 G' 中存在 H' 的一个互补平面 K' 使得 K' 在子群 $\overline{H}$ 下不变，卽 $[H', K']\subset K'$，那末 K' 中元素可用来表示相切空間的向量．有这种結构的齐性空間有許多特別重要的性质，称为化約的齐性空間．这一类齐性空間最早是 П. К. Рашевский 所研究的，我們在这里叙述他的一部分結果(見 Рашевский П. К.[2]，Nomizu K. [1])．

定理 1 化約的齐性空間的安定群与迷向群同构．

在 G' 中选基 X_i, X_p，使 $X_i\in K'$, $X_p\in H'$，則由所設的条件，

$$[X_p, X_i]=c_{pi}^j X_j.$$

如安定群与迷向群不同构，設迷向群的李代数的独立基为 $c_{ip_1}^j$ ($p_1=n+1, \cdots, s$) 而 $c_{ip_2}^j=A_{p_2}^{p_1}c_{ip_1}^j$ ($p_2=s+1, \cdots, r$)，則可另取基为 $\overline{X}_{p_1}=X_{p_1}$, $\overline{X}_{p_2}=X_{p_2}-A_{p_2}^{p_1}X_{p_1}$，并把这組基仍記为 X_p，这时成立

$$[X_{p_1}, X_i]=c_{p_1i}^j X_j,$$
$$[X_{p_2}, X_i]=0.$$

最后一式表示 X_{p_2} 是安定群到迷向群对应的同态核，并且 X_{p_2} 是 G' 的理想子代数，根据假定，H 不含 G 的正常子群，因而安定群与迷向群必同构．

我們再来証明

定理 2 如 Cartan 数量积在 H' 中不退化，則齐性空間必为化約的．

事实上，选取李代数的基，使 X_p 为 H' 的基．設 Cartan 数量积由張量 $g_{\alpha\beta}$ 来表示，在 H' 中的誘导張量 g_{pq} 成立 $\det|g_{pq}|\neq 0$．H' 在 G' 中的正交补为 K'，它与 H' 不会有公共非零向量，否則与 $|g_{pq}|\neq 0$ 矛盾．由于 $\overline{H}$ 使 H' 不变且綫性伴随群下 Cartan 数量积不变，因而 K' 在 $\overline{H}$ 下也不变，G/H 为化約的齐性空

間.

特别当李代数 G' 的 Cartan 数量积为正定时，G/H 是化約的.

类似地可証明

定理 3 設群 G 的李代数为紧致的，則齐性空間 G/H 为化約的.

化約的齐性空間 G/H 可引进仿射联絡(有撓率)[1]，使得这个仿射联絡在变換群 G 下不变，并且这个仿射联絡的撓率張量与曲率張量的共变微分为零，測地綫是单参数变換群的道路. 这些事实，可見前面已經指出的有关文献.

最后我們指出，当齐性空間 G/H 的迷向群与安定群同构时，并不能推出它是化約的，从下述例子中就可看到这一点.

例 二維空間完全綫性群的李代数 G' 的基可取为

$$X_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

$$X_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad X_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

計算后得

$$\begin{aligned}
&[X_3,\ X_4]=-X_3,\\
&[X_1,\ X_2]=X_2,\\
&[X_1,\ X_3]=-X_3,\\
&[X_2,\ X_4]=X_2,\\
&[X_1,\ X_4]=0,\\
&[X_2,\ X_3]=X_1-X_4.
\end{aligned}$$

因而可見 X_3, X_4 作成子代数，記为 H，作齐性空間 G/H 則可知它不是化約的，但它的迷向群与安定群同构.

---

[1] 仿射联絡的意义見 §5·6 或 §6·1.

§ 5·6 高阶的迷向群．微分几何对象

在齐性空間 G/H 中，我們已取好一点 P_0: $(0, 0, \cdots, 0)$，又設 $u^i=0$，即

$$\bar{x}^i=\varphi^i(0, u^p; x^j)=g^i(u^p; x^j) \tag{5·6·1}$$

为这点的安定群．現在我們引入記号

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial g^i}{\partial x^j}\right)_{x^j=0}=\gamma^i_j(u^p),\\&\left(\frac{\partial^2 g^i}{\partial x^{j_1}\partial x^{j_2}}\right)_{x^j=0}=\gamma^i_{j_1j_2}(u^p),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\left(\frac{\partial^s g^i}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_s}}\right)_{x^j=0}=\gamma^i_{j_1\cdots j_s}(u^p),\end{aligned}\right\} \tag{5·6·2}$$

s 为任何整数．在这样的記号下，迷向群的方程为

$$d\bar{x}^i=\gamma^i_j(u^p)dx^j,$$

这里的 dx^i 是指相切空間的向量而言．

在微分几何的研究中，有时必須引入高阶的相切空間．例如，以 (dx^i, d^2x^i) 为坐标的元素全体构成二阶的相切空間．在齐性空間中，安定群在二阶的相切空間中誘导出一个变换群

$$\left.\begin{aligned}&d\bar{x}^i=\gamma^i_j(u^p)dx^j,\\&d^2\bar{x}^i=\gamma^i_j(u^p)d^2x^j+\gamma^i_{j_1j_2}(u^p)dx^{j_1}dx^{j_2}.\end{aligned}\right\} \tag{5·6·3}$$

它幷非一个綫性变换群，但由于微分的变换規則，容易知道它也构成一群，称为二阶的迷向群．也可推知，安定群到二阶迷向群的对应是同态．一般来說，$(dx^i, d^2x^i, \cdots, d^sx^i)$ 的全体构成 s 阶相切空間，变换

$$\left.\begin{aligned}&d\bar{x}^i=\gamma^i_j(u^p)dx^j,\\&d^2\bar{x}^i=\gamma^i_j(u^p)d^2x^j+\gamma^i_{j_1j_2}(u^p)dx^{j_1}dx^{j_2},\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&d^s\bar{x}^i=s!\sum_{k=1}^{s}\frac{\gamma^i_{j_1\cdots j_k}(u^p)}{k!}\sum_{(\alpha_1+\cdots+\alpha_k=s)}\frac{d^{\alpha_1}x^{j_1}}{\alpha_1!}\cdots\frac{d^{\alpha_k}x^{j_k}}{\alpha_k!}\end{aligned}\right\} \tag{5·6·4}$$

的全体为 s 阶的迷向群，它們成群的性质也是由高阶微分本身在变换下成群的性质推出的．又安定群和高阶迷向群也是同态的．这些事实的論証在思想上是簡单的，和 §5·2 的討論十分类似，但在具体写法上却繁复得多，我們不在这里詳細写出了(見 Вагнер В. В. [1])．

s 阶迷向群是 s 阶全微分群的子群．所謂 s 阶全微分群便是由表达式

$$\left.\begin{aligned} d\bar{x}^i &= a^i_j dx^j, \\ d^2\bar{x}^i &= a^i_j d^2x^j + a^i_{j_1j_2} dx^{j_1} dx^{j_2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d^s\bar{x}^i &= s! \sum_{k=1}^{s} \frac{a^i_{j_1\cdots j_k}}{k!} \sum_{(a_1+\cdots+a_k=s)} \frac{d^{a_1}x^{j_1}}{a_1!} \cdots \frac{d^{a_k}x^{j_k}}{a_k!} \end{aligned}\right\} \qquad (5\cdot 6\cdot 5)$$

所表出的群，式中的 a^i_j, $a^i_{j_1j_2}$, $\cdots$, $a^i_{j_1\cdots j_s}$ 是任意的常数，关于下标对称，且 $\det|a^i_j|\neq 0$．

对迷向群[1] 和安定群同构的齐性空間，当然也可以制作它的高阶迷向群，但我們更感兴趣的是对迷向群和安定群不同构的情形来考察高阶迷向群．例如，对射影变换群(5·2·19)，我們已作出它的一阶迷向群(5·2·21)

$$d\bar{x}^i = a^i_j dx^j.$$

把(5·2·20)微分两次(d^2x^i 不应置为 0)，再令 $x^j=0$，我們得

$$d^2\bar{x}^i = a^i_j d^2x^j - 2a^i_j c_l dx^j dx^l.$$

把上面两类式子合并在一起，就得到二阶迷向群．

s 阶迷向群作为变换群来說，包含了 $s-1$ 阶迷向群的方程为其一部分，由此可自然地定义出一个 s 阶迷向群到 $s-1$ 阶迷向群的同态对应．对射影变换群而言，二阶迷向群到一阶迷向群的同态对应的核为

[1] 迷向群一詞常指一阶的迷向群．

$$d\bar{x}^i=dx^i,\quad d^2\bar{x}^i=d^2x^i-2c_j dx^i dx^j.$$

这是 Abel 群的一个表示. 二阶迷向群的参数为 n^2+n 个,因此对射影变换群来説,安定群和二阶迷向群同构.

此外,我們注意到(5·6·5)是在 s 阶相切空間中的一个变换群,它可以作为一个抽象群的表示,这个群本身可以 a^i_j, $a^i_{j_1j_2}$, $\cdots$, $a^i_{j_1\cdots j_s}$ 为参数表示为一个李群,也称为全微分群,它的乘法关系实际上就是复合函数的微商的公式(我們在这里也不具体写出了,見 Вагнер В. В. [1]). 对于一个变换群来説,它所对应的各阶迷向群相应地为各阶全微分群的子群,其定义方程也可写成

$$a^i_j=\gamma^i_j(u^p),\quad a^i_{j_1j_2}=\gamma^i_{j_1j_2}(u^p),\cdots,a^i_{j_1\cdots j_s}=\gamma^i_{j_1\cdots j_s}(u^p).\tag{5·6·6}$$

全微分群的表示在微分几何学上有很大的作用. 現設 s 阶全微分群在某一 N 維空間中有一表示,以 a^i_j, $\cdots$, $a^i_{j_1\cdots j_s}$ 所对应的变换具方程

$$\bar{\Omega}^A=f^A(\Omega^B,a^i_j,a^i_{j_1j_2},\cdots,a^i_{j_1j_2\cdots j_s}).\tag{5·6·7}$$

这空間的每一元素就称为一个微分几何对象,Ω^A 称为它的支量. 在 n 維空間 $M:(x^1,\cdots,x^n)$ 中,如每点均带有一个几何对象,相应于这坐标系統,每点有支量 $\Omega^A(x)$. 又規定,在坐标变换

$$\bar{x}^i=f^i(x^j)\tag{5·6·8}$$

之下,这一微分几何对象的支量受到变换

$$\bar{\Omega}^A(\bar{x})=f^A\left(\Omega^B;\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^j},\cdots,\frac{\partial^s\bar{x}^i}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_s}}\right),\tag{5·6·9}$$

那末就称 M 带有一个 s 阶的微分几何对象場. 張量就是一阶微分几何对象的例子,例如,对二阶反变張量(5·5·7)就取形状

$$\bar{T}^{ij}=T^{kl}a^i_k a^j_l.\tag{5·6·10}$$

应該注意的是微分几何对象的变换規則(5·5·7)是 s 阶全微分

群的一个表示，所以微分几何对象場实质上是和坐标系統选取无关的一个研究对象．一个“几何空間”往往要以它所带有的基本微分几何对象場为它的特征．例如，Riemann 空間就是带有一个正定的二阶对称共变張量場为其特征．

可以举出很多微分几何对象的例子来，我們还要特别談一下“仿射联絡”，这是一个二阶的微分几何对象，它有 n^3 个支量，它的变换規則由

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^h_{lm} a^i_h \tilde{a}^l_j \tilde{a}^m_k - a^i_{lm} \tilde{a}^l_j \tilde{a}^m_k \qquad (5\cdot6\cdot11)$$

所确定（$(\tilde{a}^i_j)$ 和 (a^i_j) 为互逆的陣）．如所知，在 Riemann 空間中，依 Christoffel 記号可以导出一个仿射联絡場．另外，也可以把仿射联絡場作为一个基本微分几何对象場来定义一类“仿射联絡空間”．

現設 M 中有一可迁变换群的方程为

$$\bar{x}^i = \varphi^i(u^\alpha; x^j), \qquad (5\cdot6\cdot12)$$

又 $\Omega^A(x)$ 为 M 上的一个微分几何对象場，如果在 (5·6·12) 之下常成立

$$\Omega^A(\bar{x}) = F^A(\Omega^B(x), \varphi^i_j, \varphi^i_{j_1 j_2}, \cdots, \varphi^i_{j_1 \cdots j_s}), \qquad (5\cdot6\cdot13)$$

式中

$$\varphi^i_{j_1 \cdots j_l} = \frac{\partial^l \varphi^i}{\partial x^{j_1} \cdots \partial x^{j_l}}, \qquad (5\cdot6\cdot14)$$

那末就称微分几何对象場在这变换群下为不变的．这一定义是張量在群下的不变性的推广，在下面一章討論 Riemann 空間运动时，我們就能进一步看到它的意义．

現指出在一齐性空間中制作不变的微分几何对象場的一个方法（Вагнер В. В. [1]）．我們先取好一点 $P_0 \in M$，再考察方程

$$\Omega^A = f^A(\Omega^B; \gamma^i_j(u^\rho), \cdots, \gamma^i_{j_1 \cdots j_s}(u^\rho)), \qquad (5\cdot6\cdot15)$$

如果 Ω^B 是这方程的一組解，令它为在 P_0 点的一个微分几何对

象．不妨設 P_0 的坐标为 $(0, 0, \cdots, 0)$．記

$$\Omega^A(0)=\Omega^A, \tag{5·6·16}$$

又設 $P(x^i)$ 为任意另外一点，$\bar{x}^i=\varphi^i(x)$ 为群中把 P_0 变到 P 的任一变换，那末我們置

$$\Omega^A(x)=f^A(\Omega^B(0),\ \varphi^i_j,\ \cdots,\ \varphi^i_{j_1\cdots j_s}), \tag{5·6·17}$$

式中的

$$\varphi^i_{j_1\cdots j_a}=\left(\frac{\partial^a\varphi^i}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_a}}\right)_{x^i=0}.$$

首先需要明确，$\Omega^A(x)$ 是唯一确定的，这就是，它不因使 P_0 变为 P 的不同的变换的取法而有所不同．現設 $\varphi^i(x)$ 和 $\psi^i(x)$ 是具有这样性质的两个变换，要証明

$$f^A(\Omega^B(0),\ \varphi^i_j,\ \cdots,\ \varphi^i_{j_1\cdots j_s})=f^A(\Omega^B(0),\ \psi^i_j,\ \cdots,\ \psi^i_{j_1\cdots j_s}). \tag{5·6·18}$$

現設 $\bar{x}^i=\chi^i(x)$ 为 $\bar{x}^i=\varphi^i(x)$ 的逆变换，$\bar{x}^i=\lambda^i(x)$ 为 $\bar{x}^i=\chi^i(x)$ 和 $\bar{x}^i=\psi^i(x)$ 的乘积，因此变换 $\bar{x}^i=\lambda^i(x)$ 属于安定群．記

$$\left.\begin{aligned}\chi^i_{j_1\cdots j_a}&=\left(\frac{\partial^a\chi^i}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_a}}\right)_{x^i=x^i},\\ \lambda^i_{j_1\cdots j_a}&=\left(\frac{\partial^a\lambda^i}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_a}}\right)_{x^i=0}.\end{aligned}\right\} \tag{5·6·19}$$

(5·6·18)式就等价于

$$\begin{aligned}&f^C(f^A(\Omega^B(0),\ \varphi^i_j,\ \cdots,\ \varphi^i_{j_1\cdots j_s}),\ \chi^i_{j_1},\ \cdots,\ \chi^i_{j_1\cdots j_s})\\ &\quad=f^C(f^A(\Omega^B(0),\ \psi^i_{j_1},\ \cdots,\ \psi^i_{j_1\cdots j_s}),\ \chi^i_{j_1},\ \cdots,\ \chi^i_{j_1\cdots j_s}),\end{aligned}$$

这就是

$$\Omega^C(0)=f^C(\Omega^B(0),\ \lambda^i_{j_1},\ \cdots,\ \lambda^i_{j_1\cdots j_s}),$$

但由于 $\bar{x}^i=\lambda^i(x)$ 属于安定群，所以 $\lambda^i_{j_1}, \cdots, \lambda^i_{j_1\cdots j_s}$ 为 s 阶迷向群的变换系数，因而依 $\Omega^C(0)$ 的定义而得知所要証的事实．

为証 $\Omega^B(x)$ 在群下不变，設 $p(x^i)$，$\bar{p}(\bar{x}^i)$ 为任何两点，φ^i 的意义照旧，$\bar{x}^i=\psi^i(x)$ 記群中将 p 变为 $\bar{p}$ 的任一变换，而

$\bar{x}^i=\chi^i(x)$ 为变换 $\bar{x}^i=\psi^i(x)$ 和 $\bar{x}^i=\varphi^i(x)$ 的乘积，此外并記

$$\chi^i_{j_1\cdots j_a}=\left(\frac{\partial^a\chi^i}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_a}}\right)_{x^i=0},\quad \psi^i_{j_1\cdots j_a}=\left(\frac{\partial^a\chi^i}{\partial x^{j_1}\cdots\partial x^{j_a}}\right)_{x^i=x^i},$$

那末

$$\begin{aligned}&f^A(\Omega^B(x),\ \psi^i_j,\ \cdots,\ \psi^i_{j_1\cdots j_s})\\&\quad=f^A(f^B(\Omega^C(0),\ \varphi^i_j,\ \cdots,\ \varphi^i_{j_1\cdots j_s}),\ \psi^i_j,\ \cdots,\ \psi^i_{j_1\cdots j_s})\\&\quad=f^A(\Omega^C(0),\ \chi^i_j,\ \cdots,\ \chi^i_{j_1\cdots j_s})=\Omega^A(\bar{x}).\end{aligned}$$

因此 $\Omega^A(x)$ 的确为群下不变的微分几何对象場.

所以已給一齐性空間，它是否容有一个 s 阶的某种类型的不变的微分几何对象場是要看是否有这类的微分几何对象能在 s 阶的迷向群下为不变.

特别，对于群空間本身，各阶迷向群都只有恒等变换，这时在任何一点給定一任何微分几何对象，都能作出一个微分几何对象場使在群的左推移(或右推移)下为不变，而在該点的支量就取已給的值.

研究微分几何对象場的不变性的另一工具是李导数. 但本书中并不应用这一工具，故从略，对綫性的几何对象的李导數理論及其应用可参看专著 (Yano K. [1])，在谷超豪的論文[5]中补充了对非綫性的情形的一般理論.

注 我們可以把群 G 的算子 ω^i, ω^α 选擇得恰当，使得群的 Cartan-Maurer 方程具形状

$$\left.\begin{aligned}&D\omega^i=\frac{1}{2}c^i_{jk}[\omega^j,\ \omega^k]+c^i_{jp_1}[\omega^j,\ \omega^{p_1}],\\&D\omega^{p_1}=\frac{1}{2}c^{p_1}_{A_1B_1}[\omega^{A_1};\omega^{B_1}]+c^{p_1}_{jp_2}[\omega^j,\ \omega^{p_2}],\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&D\omega^{p_{s-1}}=\frac{1}{2}c^{p_{s-1}}_{A_{s-1}B_{s-1}}[\omega^{A_{s-1}},\ \omega^{B_{s-1}}]+c^{p_{s-1}}_{jp_s}[\omega^j,\ \omega^{p_s}],\end{aligned}\right\}\quad(5\cdot6\cdot20)$$

式中 A_a, B_a 表示指标 $i, p_1, \cdots, p_{a-1}$ $(a=1, \cdots, s-1)$, 又 $c^i_{jp_1} l^{p_1}=0$ 能推出 $l^{p_1}=0$, $c^{p_a}_{jp_{a+1}} l^{p_{a+1}}=0$ 能推出 $l^{p_a}=0$ $(a=2, \cdots, s)$. 还可以利用 $c^i_{jp_1}$, $c^{p_1}_{jp_2}$, $\cdots$, $c^{p_{a-1}}_{jp_a}$ 等来作出 a 阶的微分群的无穷小算子. 但因为式子比較复杂,这里也就不介紹了(見谷超豪[4]). 利用外微分形式法来研究几何对象場的工作可見 Г. Ф. Лаптев[1].

第六章　齐性 Riemann 空間

§6·1　Riemann 空間的活动标形法

在本章中我們要較細致地討論各种齐性 Riemann 空間的构造，主要采取了由迷向群来討論空間的途徑。为此，首先要对 Riemann 空間的一些基本事項作出說明，我們把这些說明置于活动标形法的基础之上。

先介紹仿射联絡的概念。在所論的空間中，在每点 $p(x^i)$ 的相切空間中已給了一个标形，其基向量为 $e_i(i=1, 2, \cdots, n)$，它們是充分光滑（或解析地分布）的，成立

$$dp=\omega^i(x, dx)e_i, \tag{6·1·1}$$

$\omega^i(x, dx)$ 是 n 个独立的 Pfaff 式，其系数为充分光滑（或解析的）。如果在这个空間中，参考于这一标形还給出一組 Pfaff 式 $\omega_i^j(x, dx)$，并賦予它以下述的几何意义：設 $p(x^i)$ 为空間任一点，$p+dp$ 为 p 的一个无限邻近点，坐标为 x^i+dx^i，依据 $\omega_i^j(x, dx)$ 定义 $p+dp$ 点的切空間和点 p 的切空間的一个綫性对应，使得 $p+dp$ 点的 $e_i(p+dp)$ 对应于 p 点的向量

$$e_i(p)+\omega_i^j(x, dx)e_j(p). \tag{6·1·2}$$

这时，我們称 $\omega_i^j(x, dx)$ 給出空間的一个仿射联絡．具仿射联絡的空間称为仿射联絡空間，剛才所引入的对应称为无穷小平行移动．依此意义，在点 $p+dp$ 的向量 $\mu^i e_i(p+dp)$ 无穷小平行移动至 p 点后就得到向量

$$\mu^i e_i(p) + \mu^i \omega_i^j(x, dx) e_j(p). \qquad (6\cdot1\cdot3)$$

在点 p 的向量 $\lambda^i e_i$ 和在点 $p+dp$ 的向量 $\mu^i e_i$ 的絕对变差是指把 $\mu^i e_i$ 进行无穷小平行移动至 p 点，然后和 $\lambda^i e_i$ 相減所得的向量．所有的运算都在一阶无穷小的范圍內进行，因此，如令 $\mu^i = \lambda^i + d\lambda^i$，那末这两个向量的絕对变差为

$$(d\lambda^i + \lambda^j \omega_j^i) e_i. \qquad (6\cdot1\cdot4)$$

特别，$e_i(p+dp)$ 和 $e_i(p)$ 的絕对变差記为

$$de_i = \omega_i^j(x, dx) e_j, \qquad (6\cdot1\cdot5)$$

式子的左边是絕对变差的記号．方程(6·1·1)和(6·1·5)联合在一起，也称为无穷小变位方程．

先考察对标形場进行变换后，仿射联絡的分析表达要进行怎样的改变．自然，这种改变应該保証它所确定的平行移动和絕对变差不受影响，为此，令

$$e_i = A_i^j(x) \bar{e}_j \quad (\det|A_i^j| \neq 0). \qquad (6\cdot1\cdot6)$$

由于

$$dp = \omega^i(x, dx) e_i = \omega^i(x, dx) A_i^j \bar{e}_j,$$

所以为了保持

$$dp = \bar{\omega}^i \bar{e}_i \qquad (6\cdot1\cdot7)$$

起見，我們有

$$\bar{\omega}^i(x, dx) = A_j^i(x) \omega^j(x, dx). \qquad (6\cdot1\cdot8)$$

其次，我們要計算 $\bar{e}_i(x+dx)$ 和 $\bar{e}_i(x)$ 的絕对变差，为此，我們有

$$\bar{e}_i(x+dx) = \tilde{A}_i^j(x+dx) e_j(x+dx).$$

把它平行移动到点 $p(x)$，得到向量

$$\widetilde{A}_i^j(x+dx)e_j(p)+\widetilde{A}_i^j(x)\omega_j^k(x,\ dx)e_k(p),$$

因此

$$d\bar{e}_i=\{d\widetilde{A}_i^j+\widetilde{A}_i^k(x)\omega_k^j(x,\ dx)\}e_j.$$

所以，为了成立

$$d\bar{e}_i=\bar{\omega}_i^j(x,\ dx)\bar{e}_j \qquad (6\cdot1\cdot9)$$

起見，必須成立

$$\bar{\omega}_i^j(x,\ dx)=(d\widetilde{A}_i^l+\widetilde{A}_i^k(x)\omega_k^l(x,\ dx))A_l^j(x). \qquad (6\cdot1\cdot10)$$

这便是当标形改变时仿射联絡的变换規律.

特别，如 $e_i(x)$ 为参考于坐标系統 (x) 的自然标形，$\bar{e}_i(\bar{x})$ 为参考于坐标系統 $(\bar{x})$ 的自然标形，那末 $\omega^i=dx^i$, $\bar{\omega}^i=d\bar{x}^i$, 此外，

$$e_i(x)=\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^i}\bar{e}_j(\bar{x}),$$

$$\bar{\omega}_i^j(\bar{x},\ d\bar{x})=\left(d\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^i}+\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}\omega_k^l(x,\ dx)\right)\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}.$$

如果記

$$\omega_i^j(x,\ dx)=\Gamma_{ik}^j(x)dx^k,\ \bar{\omega}_i^j(\bar{x},\ d\bar{x})=\bar{\Gamma}_{ik}^j(\bar{x})d\bar{x}^k, \qquad (6\cdot1\cdot11)$$

那末我們就有

$$\bar{\Gamma}_{ik}^j(\bar{x})=\frac{\partial^2x^l}{\partial\bar{x}^i\partial\bar{x}^k}\cdot\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}+\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}\cdot\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^i}\cdot\frac{\partial x^h}{\partial\bar{x}^k}\Gamma_{mh}^l(x). \qquad (6\cdot1\cdot12)$$

这实际上就符合于 §5·6 对仿射联絡的定义.

現在仍回到一般的标形来討論. 由 (6·1·8) 和 (6·1·10) 通过直接驗算可知，当标形經过变换 (6·1·6) 时，还成立下述两个关系:

$$\begin{aligned}D\bar{\omega}^i-[\bar{\omega}^l,\ \bar{\omega}_l^i]&=A_j^i(D\omega^j-[\omega^l,\ \omega_l^j]),\\ D\bar{\omega}_j^i-[\bar{\omega}_j^l,\ \bar{\omega}_l^i]&=A_k^i\widetilde{A}_j^h(D\omega_h^k-[\omega_h^l,\ \omega_l^k]).\end{aligned} \qquad (6\cdot1\cdot13)$$

因此，如記

$$D\omega^i-[\omega^l,\ \omega_l^i]=\frac{1}{2}T^i_{jk}[\omega^j,\ \omega^k],$$
$$D\omega_k^h-[\omega_k^l,\ \omega_l^h]=\frac{1}{2}R^h_{kij}[\omega^i,\ \omega^j],\tag{6·1·14}$$

那末 T^i_{jk}, R^h_{kij} 都分别是一个張量的支量，这就是，在标形的变换下，应成立

$$\overline{T}^i_{jk}=T^a_{bc}A^i_a\widetilde{A}^b_j\widetilde{A}^c_k,$$
$$\overline{R}^i_{jkl}=R^a_{bcd}A^i_a\widetilde{A}^b_j\widetilde{A}^c_k\widetilde{A}^d_l.\tag{6·1·15}$$

相应的張量称为撓率張量和曲率張量. 撓率張量等于 0 的仿射联絡称为无撓率的. 在自然标形下，$\omega^i=dx^i$，如置 $\omega^i_j=\Gamma^i_{jk}dx^k$ (Γ^i_{jk} 称为仿射联絡系数)，

$$T^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}-\Gamma^i_{jk},\tag{6·1·16}$$

从此也可見到，在自然标形下的无撓率的仿射联絡系数关于下标为对称的.

現轉入討論 Riemann 空間. 所謂 Riemann 空間便是在每点的切空間中給好一个正定的二次形式的空間. 更具体地說，設 (x^i) 为空間的一个坐标系統，在这坐标系統下，已給有二次微分形式

$$ds^2=g_{ij}(x)dx^i dx^j,\tag{6·1·17}$$

它是正定的，并假設 $g_{ij}(x)$ 关于 (x^i) 有一定的光滑性. 这时二次形式 (6·1·17) 称为空間的綫素. 利用綫素，我們可定义无穷小曲綫弧长的微分为

$$ds=\sqrt{g_{ij}(x)dx^i dx^j},\tag{6·1·18}$$

而任一曲綫 $x^i=x^i(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$ 的弧长为积分

$$s=\int_a^b\sqrt{g_{ij}(x(t))\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt.\tag{6·1·19}$$

在每一点的相切空間中，由于已經有了一个正定的二次形式，所以就成为实的歐氏空間. 相切空間在坐标 (x^i) 的自然标

形下的基設为 I_i，那末成立关系

$$(I_i,\ I_j)=g_{ij}(x), \tag{6·1·20}$$

这里的圓括弧是数量积的記号．此外，还成立

$$ds^2=(dp,\ dp). \tag{6·1·21}$$

$g_{ij}(x)$ 也称为空間的基本張量．如在每点选好另一組标形（和坐标系統无关），基为 e_i，又

$$(e_i,\ e_j)=a_{ij},\quad dp=\omega^i(x,\ dx)e_i, \tag{6·1·22}$$

那末

$$ds^2=(dp,\ dp)=a_{ij}(x)\omega^i\omega^j. \tag{6·1·23}$$

特别，当 e_i 为相互直交的单位向量时，

$$(e_i,\ e_j)=\delta_{ij},\quad ds^2=\sum(\omega^i)^2. \tag{6·1·24}$$

在 Riemann 空間中常依下述两个要求引进仿射联絡：

(i) 仿射联絡为无撓率的；

(ii) 仿射联絡所产生的无穷小平行移动能保持向量的长度．

現在証明，的确可以依照这两个要求，唯一地决定出仿射联絡来．为此，不妨設 $e_i(x)$ 为規范直交标形的基，由于 $e_i(x+dx)$ 对应于 e_i+de_i，它必須为单位向量，且两两直交（在一阶无穷小范圍內），

$$(e_i+de_i,\ e_k+de_k)=(e_i,\ e_k)+(e_i,\ de_k)+(e_k,\ de_i)=\delta_{ik}.$$

由此可見

$$(e_i,\ de_k)+(e_k,\ de_i)=0,$$

这就是

$$\omega_i^k(x,\ dx)+\omega_k^i(x,\ dx)=0. \tag{6·1·25}$$

因此，如記

$$\omega_k^i=\Gamma_{km}^i\omega^m, \tag{6·1·26}$$

那末条件(ii)就等价于

$$\Gamma^i_{km}+\Gamma^k_{im}=0. \qquad (6\cdot1\cdot27)$$

再考察条件(i)，由于 $\omega^i(x, dx)$ 为已知的，所以可記

$$D\omega^i=\frac{1}{2}\gamma^i_{jk}[\omega^j, \omega^k],$$

式中 γ^i_{jk} 为已知的函数，关于下标反称. 再参照 (6·1·27) 和 (6·1·16)，就得到 Γ^i_{jk} 所满足的第二套式子

$$\Gamma^i_{km}-\Gamma^i_{mk}=\gamma^i_{km}, \qquad (6\cdot1\cdot28)$$

它和条件(i)是等价的. 容易見到，如令

$$\Gamma^i_{km}=\frac{1}{2}(\gamma^i_{km}-\gamma^k_{im}-\gamma^m_{ik}), \qquad (6\cdot1\cdot29)$$

就可見到它满足这两套方程. 这两套方程实际的方程个数为 n^3 个，未知数 Γ^i_{km} 的个数也为 n^3 个，相应的齐次方程組为

$$\Gamma^i_{km}+\Gamma^k_{im}=0, \quad \Gamma^i_{km}-\Gamma^i_{mk}=0.$$

从这齐次方程組可見

$$\Gamma^i_{km}=-\Gamma^k_{im}=-\Gamma^k_{mi}=\Gamma^m_{ki}=\Gamma^m_{ik}=-\Gamma^i_{mk}=-\Gamma^i_{km},$$

因此，这个齐次方程組只有零解，所以(6·1·29)式便給出了唯一的仿射联絡系数. 对于 Riemann 空間而言，我們今后只用到这样的仿射联絡.

特别，在自然标形 I_i 下，利用 $(I_i, I_j)=g_{ij}(x)$，我們得

$$\begin{aligned}g_{ij}(x+dx)&=(I_i+dI_i, I_j+dI_j)=g_{ij}(x)+(I_i, dI_j)+(I_j, dI_i)\\&=g_{ij}(x)+g_{ik}\omega^k_j+g_{kj}\omega^k_i,\end{aligned}$$

因此(6·1·25)化为

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}-\Gamma^k_{jl}g_{ik}-\Gamma^k_{il}g_{kj}=0, \qquad (6\cdot1\cdot25')$$

而(6·1·28)化为 $\Gamma^i_{km}-\Gamma^i_{mk}=0$. 可以得出 Γ^i_{jk} 的表达式为

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m}\right), \qquad (6\cdot1\cdot30)$$

式中的 g^{im} 为 (g_{ij}) 的逆陣的元素. 这样的 Γ^i_{jk} 称为第二类 Christoffel 記号，而記号

$$[jk,\ m]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m}\right) \qquad (6\cdot1\cdot31)$$

称为第一类 Christoffel 記号.

由向量的絕对变差还可引出張量的絕对变差. 在任意的标形 $\{e_i\}$ 下，在 p 点有張量，其支量是 $T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}$, 在 $p+dp$ 有張量，其支量为 $T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}+dT^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}$；那末这两个張量的絕对变差就是

$$\begin{aligned}DT^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}=&dT^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}+\omega^{i_1}_iT^{i\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}+\cdots+\omega^{i_a}_iT^{i_1\cdots i}_{j_1\cdots j_b}\\&-\omega^i_{j_1}T^{i_1\cdots i_a}_{i\cdots j_b}-\cdots-\omega^i_{j_b}T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots i}.\end{aligned} \qquad (6\cdot1\cdot32)$$

这一表达式称为絕对微分，如記

$$DT^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}=T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b,k}\omega^k, \qquad (6\cdot1\cdot33)$$

那末，$T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b,k}$ 也是一个張量的支量，称为張量 $T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}$ 的共变导数.

在許多情况下，我們还要用到更一般的标形族，这就是，我們所用的标形族除依賴于点 (x^i) 外，还依賴于另外的一些参数 u^{n+1}, $\cdots$, u^{n+s}. 这时

$$dp=\omega^i(x,\ u,\ dx)e_i, \qquad (6\cdot1\cdot34)$$

同时，作 $e_i(x+dx,\ u+du)$ 和 $e_i(x,\ u)$ 的絕对变差，我們也得到表达式

$$de_i=\omega^j_i(x,\ u,\ dx,\ du)e_j, \qquad (6\cdot1\cdot35)$$

这里的 Pfaff 式 ω^j_i 依賴于 x, u, dx, du, 而

$$a_{ij}(x,\ u)=(e_i,\ e_j) \qquad (6\cdot1\cdot36)$$

也为 $(x,\ u)$ 的函数. 从一巳知标形族（例如自然标形族 $\{I_i\}$）出发，利用 $(6\cdot1\cdot6)$ 式以后的一些計算可以得出 $\omega^i(x,\ u,\ dx)$ 和 $\omega^j_i(x,u,dx,du)$，这时可取那时的 $\{e_i\}$ 为 $\{I_i\}$，而 $\{\bar{e}_i\}$ 为現在的 $\{e_i\}$，但 A^j_i 不仅为 (x^i) 的函数，而且也依賴于参数 $u^{n+1},\cdots,u^{n+s}$. 应該指出的是，直接計算表明在当前的情况下仍然有

$$D\omega^i-[\omega^l,\ \omega_l^i]=0,$$
$$D\omega_j^i-[\omega_j^k,\ \omega_k^i]=\frac{1}{2}R_{jkl}^i[\omega^k,\ \omega^l],\qquad(6\cdot1\cdot37)$$

而仿射联絡的条件(i)化为

$$da_{ij}-\omega_i^l a_{lj}-\omega_j^l a_{il}=0.\qquad(6\cdot1\cdot38)$$

R_{jkl}^i 和 a_{ij} 分别为空間的曲率張量和基本張量在所参考的标形(依賴于参数$(x^i,\ u^a)$)下的支量，有时也簡单地称它們为曲率張量和基本張量.

利用基本張量 a_{ij} 还可以从一个張量得出另一个張量，使其反变阶数减少一个，共变阶数增加一个. 例如，对曲率張量，作

$$R_{ijkl}=a_{ih}R_{jkl}^h,$$

就得一四阶共变的張量，也称它为曲率張量. 又作基本張量(a_{ij})所成的逆陣(a^{ij})，容易驗証，它是一个二阶反变的張量. 利用它也可以从一个張量得出另外的張量，但这时共变阶数减少 1，而反变阶数增加 1.

再指出，由微分方程

$$\frac{d\omega^i\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}+\omega_j^i\left(\frac{dx}{ds}\right)\omega^j\left(\frac{dx}{ds}\right)=0\qquad(6\cdot1\cdot39)$$

所定义的曲綫是 Riemann 空間的測地綫，这里 s 为弧长参数，它的意义是：在任何两个邻近点 p 和 $p+dp$，切綫向量

$$\omega^i\left(\frac{dx}{ds}\right)e_i(p)\quad 和\quad \omega^i\left(\frac{dx}{ds}\right)e_i(p+dp)$$

是平行的，它是連接两个相距不太远的点的曲綫上弧长最短的曲綫.

我們再提出一項注意. 在自然标形下，一張量的支量之間的某些綫性关系式，是可以移用到一般标形中去，例如对于自然标形，我們容易求出 R_{ijkl} 的表达式，可以見到 R_{ijkl} 关于 $i,\ j$;

k, l 均为反称,且有

$$R_{ijkl}=R_{klij},\quad R_{ijkl}+R_{iklj}+R_{iljk}=0,\qquad (6\cdot1\cdot40)$$
$$R^i_{jkl}+R^i_{klj}+R^i_{ljk}=0,$$

而在一般标形下也成立这些关系式. 在自然标形下,满足条件 $R_{ijkl}=k_0(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})$ 的空間称为常曲率空間, 那末在任意标形下,有空間 V_n 为常曲率的充要条件就是成立

$$R_{ijkl}=k_0(a_{ik}a_{jl}-a_{il}a_{jk}).\qquad (6\cdot1\cdot41)$$

这一段内容的詳細叙述可参看专著 Cartan E. [5], 又在 Eisenhat L. P. 的书[1]中单利用張量分析而叙述了 Riemann 空間几何学的基本事项.

§6·2 齐性 Riemann 空間. 可容許标形族

齐性 Riemann 空間是指容許可迁的运动群的 Riemann 空間 V_n. 这就是說,設在坐标系統(x^i)下, V_n 的綫素为

$$ds^2=g_{ij}(x)dx^idx^j\quad(i,\ j=1,\ \cdots,\ n),\qquad (6\cdot2\cdot1)$$

存在一个作用于这空間的可迁变换群 G_r,

$$\bar{x}^i=f^i(u^\alpha,\ x^j)\quad(\alpha=1,\ \cdots,\ r),\qquad (6\cdot2\cdot2)$$

使能滿足

$$g_{ij}(\bar{x})d\bar{x}^id\bar{x}^j=g_{ij}(x)dx^idx^j\quad(i,\ j=1,\ \cdots,\ n).\qquad (6\cdot2\cdot3)$$

V_n 是齐性空間,变换群 G_r 就称为 V_n 的运动群. 运动群 G_r 是一个李群 G 的表示,可記李群 G 的乘法关系为

$$\bar{x}^i=f^i(u^\alpha,\ x^j),$$
$$\bar{x}^\rho=f^\rho(u^\alpha,\ x^j,\ x^\rho)\quad(\rho=n+1,\ \cdots,\ r).\qquad (6\cdot2\cdot4)$$

在运动之下,向量的长度,数量积不变. 又两邻近向量間的平行性也不改变(因絕对变差是由基本張量所唯一确定的). 分析的驗証留給讀者自己来作.

在 V_n 中任取一点 p_0 及在这点的直交标形$\{\underset{0}{e_i}\}$,經过运动群

后，所得到的标形均为直交的，它分布到 V_n 中每一点，因而得到 V_n 的一个直交标形族，称为运动群 G_r 的可容許标形族．这时每个标形依賴于参数 $(u^1, \cdots, u^r)$．設 $u^\alpha=0$ 对应恒等变换，則由

$$f^i(u^\alpha, 0)=u^i \tag{6·2·5}$$

可知标形 $e_i(u^1, \cdots, u^r)$ 的原点为 u^i．因而 x^i 点的可容許标形 $e_i(x^i, u^\rho)$ 依賴于参数 u^ρ．記 u^ρ 为 x^ρ，则 $p(x^i)$ 点的标形为 $e_i(x^i, x^\rho)$，在这个标形下有无穷小变位方程

$$dp=\omega^i(x^k, x^\rho, dx^k)e_i(x^k, x^\rho), \tag{6·2·6}$$

$$de_i=\omega_i^j(x^k, x^\rho, dx^k, dx^\rho)e_j(x^k, x^\rho). \tag{6·2·7}$$

經过变换 g_u 之后，$x^i\to\bar{x}^i$, $x^\rho\to\bar{x}^\rho$, $dx^i\to d\bar{x}^i$, $dx^\rho\to d\bar{x}^\rho$，已如上章所指出，

$$\omega^i(\bar{x}^i, \bar{x}^\rho, d\bar{x}^i)=\omega^i(x^i, x^\rho, dx^i). \tag{6·2·8}$$

又 $\omega^i(x, dx)=0$ 是完全可积的，并且是 $(0, \cdots, 0)$ 点的安定群所满足的微分方程，又 $\omega^i(x, u, dx)$ 为綫性独立的．

在运动群下，两邻近标形間的微小变位关系是保持不变的．詳細說来，在运动群下 $e_i(x)\to e_i(\bar{x})$, $e_i(x+dx)\to e_i(\bar{x}+d\bar{x})$，并且由于邻近向量的平行性是由空間的綫素所唯一确定的，因此，既然变换前 $e_i(x+dx)$ 与 $e_i(x)+de_i(x)$ 相平行，那末变换后的向量 $e_i(\bar{x}+d\bar{x})$ 与 $e_i(\bar{x})+de_i(\bar{x})$ 也相平行，所以，在运动下 $de_i(x)\to de_i(\bar{x})$．又利用运动下向量的綫性关系保持不变这一性质，就得到

$$de_i(\bar{x})=\omega_i^j(\bar{x}, d\bar{x})e_j(\bar{x})=\omega_i^j(x, dx)e_j(\bar{x}),$$

即

$$\omega_i^j(\bar{x}^i, \bar{x}^\rho, d\bar{x}^i, d\bar{x}^\rho)=\omega_i^j(x^i, x^\rho, dx^i, dx^\rho) \tag{6·2·9}$$

成立．所以知道 $\omega^i(x, dx)$ 与 $\omega_i^j(x, dx)$ 是群 G_r 的第二类不变

形式[1]. 設从 ω^i, ω^i_j 中已选出一組常系数独立的 Pfaff 式 ω^i, ω^{ρ_1} ($\rho_1=n+1, \cdots, r_1\leqslant r$) 使 ω^i_j 也可以由它們的常系数綫性組合表出,此时必有 $r_1=r$. 为了証明这一点,考察方程

$$D\omega^i=[\omega^j,\ \omega^i_j],$$

$$D\omega^i_j=[\omega^k_j,\ \omega^i_k]+\frac{1}{2}R^i_{jkl}[\omega^k,\ \omega^l].$$

因而可見 $\omega^i=0$, $\omega^{\rho_1}=0$ 的特征系統即

$$\omega^i=0,\quad \omega^{\rho_1}=0$$

本身,故若 $r_1<r$, 則 $\omega^i=0$, $\omega^{\rho_1}=0$ 能决定一个包含于安定群 H 的 G 的正常子群,这是不容許的,因此 $r_1=r$. 而群 G_r 的第二类不变形式可取为 ω^i, ω^ρ, 因而 ω^i_j 可为

$$\omega^i_j=l^i_{jk}\omega^k+l^i_{j\rho}\omega^\rho, \tag{6·2·10}$$

这里 l^i_{jk}, $l^i_{j\rho}$ 为常数. 現在要进一步来确定 l^i_{jk} 与 $l^i_{j\rho}$, 把它們用結构常数表示出来. 首先我們注意到一点的迷向群把規范直交标形变为規范直交标形,因此必須为旋轉群, 由 §5·4 的論述就能知道,这时迷向群必和安定群同构.

写出群的 Maurer-Cartan 方程

$$\begin{aligned} D\omega^i&=\frac{1}{2}c^i_{jk}[\omega^j,\ \omega^k]+c^i_{j\rho}[\omega^j,\ \omega^\rho],\\ D\omega^\rho&=\frac{1}{2}c^\rho_{jk}[\omega^j,\ \omega^k]+c^\rho_{j\sigma}[\omega^j,\ \omega^\sigma]\\ &\quad+\frac{1}{2}c^\rho_{\sigma\tau}[\omega^\sigma,\ \omega^\tau]. \end{aligned} \tag{6·2·11}$$

由于$(c^i_{j\rho})$属于迷向群的李代数,而迷向群現在是旋轉群,并且我們在直交标形下来考察它,因此 $c^i_{j\rho}$ 滿足

$$c^i_{j\rho}+c^j_{i\rho}=0. \tag{6·2·12}$$

---

[1] 这一事实的証明可能看起来不大明显, 因为它用到运动使平行性不变. 但是, 如不把后文中的(6·2·10)式中的 l^i_{jk}, $l^i_{j\rho}$ 事先假定为常数, 可以完全不改变論述而得出(6·2·16)式,这也就給出所述事实的另一証明.

由 $a_{ij}=\delta_{ij}$，我們从(6·1·38)可推出

$$\omega_i^j+\omega_j^i=0.$$

故(6·2·10)中的 l_{ik}^j，$l_{i\rho}^j$ 应成立

$$l_{ik}^j+l_{jk}^i=0,\quad l_{j\rho}^i+l_{i\rho}^j=0. \tag{6·2·13}$$

另一方面，将(6·2·11)的第一式与

$$\begin{aligned}D\omega^i&=[\omega^j,\ l_{jk}^i\omega^k+l_{j\rho}^i\omega^\rho]\\&=\frac{1}{2}(l_{jk}^i-l_{kj}^i)[\omega^j,\ \omega^k]+l_{j\rho}^i[\omega^j,\ \omega^\rho]\end{aligned}$$

相比較，可得出

$$l_{j\rho}^i=c_{j\rho}^i, \tag{6·2·14}$$

$$l_{jk}^i=\frac{1}{2}(c_{jk}^i-c_{ik}^j-c_{ij}^k). \tag{6·2·15}$$

因此就算出了

$$\omega_j^i=\frac{1}{2}\sum_k(c_{jk}^i-c_{ik}^j-c_{ij}^k)\omega^k+c_{j\rho}^i\omega^\rho. \tag{6·2·16}$$

我們继續討論齐性 Riemann 空間的某些一般的性质．已經知道，齐性 Riemann 空間的迷向群必为旋轉群，現在証明其逆，即迷向群为旋轉群的齐性空間必可作为齐性 Riemann 空間．为此我們先証明下面的引理．

引理(Cartan E.)　設 $\omega^i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$为 n 个独立 Pfaff 式，且

$$D\omega^i=\frac{1}{2}a_{jk}^i[\omega^j,\ \omega^k]+b_{j\rho}^i[\omega^j,\ \omega^\rho]. \tag{6·2·17}$$

如有常数 a_{ij} 滿足

$$a_{lj}b_{i\rho}^l+a_{il}b_{j\rho}^l=0, \tag{6·2·18}$$

則二次微分形式 $\Omega=a_{ij}\omega^i\omega^j$ 只与 x^i，dx^i 有关，这里 x^i 为完全可积 Pfaff 方程組 $\omega^i=0$ 的 n 个独立的初积分．

【証】　由于方程 $\omega^i=0$ 为完全可积，且 x^i 为一組独立的初

积分，所以可把 ω^i 表示为

$$\omega^i = \alpha^i_j(x, u)dx^j. \qquad (6\cdot2\cdot19)$$

系数 α^i_j 还依賴于另外的一些自变量 u^α. 在自变量 x^i, u^α 的空間中，任取一組微分 δx^i, δu^ρ, 但規定 $\delta x^i=0$. 我們还把 δ 理解为微分算子

$$\delta u^\rho \frac{\partial}{\partial u^\rho}, \qquad (6\cdot2\cdot20)$$

依外微分的定义及(6·2·17)式，我們可得

$$\delta\omega^i(d) = \frac{\partial\alpha^i_j(x, u)}{\partial u^\rho}\delta u^\rho dx^j$$

$$= -b^i_{j\rho}(x, u)\omega^j(d)\omega^\rho(\delta). \qquad (6\cdot2\cdot21)$$

令 $\Omega = a_{ij}\omega^i\omega^j$, 那末

$$\delta\Omega = \delta u^\rho \frac{\partial}{\partial u^\rho}(a_{ij}\omega^i(d)\omega^j(d))$$

$$= a_{ij}\delta\omega^i(d)\omega^j(d) + a_{ij}\omega^i(d)\delta\omega^j(d)$$

$$= -a_{ij}b^i_{k\rho}\omega^k(d)\omega^\rho(\delta)\omega^j(d) - a_{ij}\omega^i(d)b^j_{k\rho}\omega^k(d)\omega^\rho(\delta)$$

$$= -(a_{ij}b^i_{k\rho} + a_{ki}b^i_{j\rho})\omega^k(d)\omega^j(d)\omega^\rho(\delta) = 0. \qquad (6\cdot2\cdot22)$$

由于 δu^ρ 为任意的，所以 Ω 和 u 无关.

注 如 a_{ij} 关于下标为反称，令 Ω 为外形式

$$\Omega = a_{ij}[\omega^i, \omega^j]$$

$$= a_{ij}(\omega^i(d_1)\omega^j(d_2) - \omega^i(d_2)\omega^j(d_1)). \qquad (6\cdot2\cdot23)$$

当(6·2·17), (6·2·18) 成立时，Ω 也和 u^ρ 无关. 这一事实的証明和引理的証明相同，只是在計算 $\delta(\Omega(d_1, d_2))$ 时要利用外微分公式 $D\Omega = \delta\Omega(d_1, d_2) + d_1\Omega(d_2, \delta) + d_2\Omega(\delta, d_1)$ (这里第二、三項前面的 d_1, d_2 也是当作微分算子看的)，而在 $\delta x^i=0$ 的假設下，这式子化为 $D\Omega = \delta\Omega(d_1, d_2)$. 我們在后文中要用到这一結果.

現在我們回到原来的問題. 設一齐性空間 G/H，其迷向群

为旋轉群，这就是說，在相切空間选取了适当的基之后，迷向群就由一些直交陣所表示，因此我們可选取适当的初始标形来制作可容許标形族，使迷向群李代数的基$(c^i_{j\rho})$满足

$$c^i_{j\rho}+c^j_{i\rho}=0, \qquad (6\cdot2\cdot24)$$

即

$$\delta_{lj}c^l_{i\rho}+\delta_{il}c^l_{j\rho}=0.$$

又因

$$D\omega^i=\frac{1}{2}c^i_{jk}[\omega^j,\ \omega^k]+c^i_{j\rho}[\omega^j,\ \omega^\rho], \qquad (6\cdot2\cdot25)$$

利用引理知$\delta_{ij}\omega^i\omega^j$仅与$\omega^i=0$的初积分$x^i$及$dx^i$有关，所以

$$ds^2=\sum(\omega^i)^2$$

为一 Riemann 綫素，且因ω^i在群G_r的变换下不变，所以ds^2在群G_r的变换下也不变. 因此我們就得到了

定理1 齐性空間G/H可作为齐性 Riemann 空間的充要条件是其迷向群在适当基下构成旋轉群.

我們要进一步决定在这样的齐性空間G/H中，使在G下不变的所有 Riemann 綫素. 这就是要选常数a_{ij}而使$a_{ij}\omega^i\omega^j$仅与$\omega^i=0$的初积分x^i及dx^i有关. 由引理的証明过程中知道問題可归結为求方程

$$a_{lj}c^l_{i\rho}+a_{il}c^l_{j\rho}=0 \qquad (6\cdot2\cdot26)$$

的解，但$a_{ij}=a_{ji}$，且二次形式$a_{ij}\lambda^i\lambda^j$应为正定. 記$C_\rho=(c^i_{j\rho})$，$A=(a_{ij})$則由于C_ρ为反称陣，条件(6·2·26)等价于

$$AC_\rho=C_\rho A.$$

我們在§4·6中已經指出A的决定方法，但这里須再添加正定的条件，特别在迷向群为不可約时，对称陣A必为λE，$\lambda>0$，其綫素必为

$$ds^2=\lambda\sum(\omega^i)^2.$$

現在再証明

定理 2 齐性 Riemann 空間 G/H 必为化約的.

【証】 設 G, H 的李代数分别为 G' 及 H'. 为証 G/H 是化約的,只須証明 G' 的 Cartan 数量积在 H' 上所誘导的二次形式为非退化卽可. 当我們选取可容許直交标形时,則有

$$c^i_{j\rho}+c^j_{i\rho}=0 \quad (i,\ j=1,\ \cdots,\ n;\ \rho=n+1,\ \cdots,\ r). \tag{6·2·27}$$

但由

$$c^i_{l\rho}c^l_{j\sigma}-c^i_{l\sigma}c^l_{j\rho}=c^\tau_{\rho\sigma}c^i_{j\tau} \tag{6·2·28}$$

可見 $c^\tau_{\rho\sigma}$ 为迷向群的結构常数. 由于直交代数为紧致代数,故其內微分代数亦为直交代数,所以可适当选取李代数 H' 的基,使

$$c^\tau_{\rho\sigma}+c^\rho_{\tau\sigma}=0. \tag{6·2·29}$$

因为

$$\begin{aligned} g_{\rho\sigma}a^\rho a^\sigma &= (c^\delta_{\gamma\rho}c^\gamma_{\delta\sigma})a^\rho a^\sigma=(c^j_{i\rho}c^i_{j\sigma}+c^\gamma_{\mu\rho}c^\mu_{\gamma\sigma})a^\rho a^\sigma \\ &= -\sum(c^i_{j\rho}a^\rho)^2-\sum(c^\nu_{\mu\rho}a^\rho)^2\leqslant 0, \end{aligned} \tag{6·2·30}$$

而等号仅当 a^ρ 满足

$$c^i_{j\rho}a^\rho=0, \quad c^\nu_{\mu\rho}a^\rho=0$$

时才成立, 但齐性 Riemann 空間的安定群与迷向群同构, 故由前一組式可知 $a^\rho=0$, 这样得到 $g_{\rho\sigma}a^\rho a^\sigma$ 为負定, 显然非退化,故定理得証。

利用齐性 Riemann 空間为化約的性质可知,当选取李代数 G' 的适当基后可使 $c^\sigma_{i\rho}=0$, 这样我們就可簡化 Maurer-Cartan 方程为

$$\begin{aligned} D\omega^i &= \frac{1}{2}c^i_{jk}[\omega^j,\ \omega^k]+c^i_{j\sigma}[\omega^j,\ \omega^\sigma], \\ D\omega^\rho &= \frac{1}{2}c^\rho_{jk}[\omega^j,\ \omega^k]+\frac{1}{2}c^\rho_{\sigma\tau}[\omega^\sigma,\ \omega^\tau]. \end{aligned} \tag{6·2·31}$$

且 $c^i_{j\rho}$ 关于 i, j 反称, $c^\rho_{\sigma\tau}$ 关于 σ, τ 反称.

这时(5·3·7)式变为

$$c^i_{lm}c^k_{lp}+c^k_{il}c^i_{mp}-c^k_{im}c^i_{lp}=0, \tag{6·2·32}$$

这式子可解釋为：c^i_{lm} 为迷向群的不变張量．

注 1 在前面所用的記号下，齐性 Riemann 空間 G/H 的群 G 的微分方程可以只写作

$$\omega^i(\bar{x}^j, \bar{x}^\rho, d\bar{x}^j)=\omega^i(x^j, x^\rho, dx^j). \tag{6·2·33}$$

这因为，迷向群为旋轉群，故为不可延拓，所以本来还应該有的另外一套方程

$$\omega^\rho(\bar{x}^j, \bar{x}^\sigma, d\bar{x}^j, d\bar{x}^q)=\omega^\rho(x^j, x^\sigma, dx^j, dx^q) \tag{6·2·34}$$

为(6·2·33)的外微分及(6·2·33)本身的推論．

注 2 設$(a^i_j(u))$构成一个旋轉群 H，取变換群 G

$$\bar{x}^i=a^i_j(u^\rho)x^j+u^i, \tag{6·2·35}$$

那末 G/H 就是欧氏空間，这时可取

$$\omega^i(x, dx)=a^i_j(x^\rho)dx^j. \tag{6·2·36}$$

我們还要叙述一下由微分算子

$$X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{6·2·37}$$

所成的单参数变換群为 Riemann 空間 V_n 的运动群的充要条件，这时 V_n 不必为齐性的．我們利用自然标形，令 $\bar{x}^i=f^i(x, t)$ 为这单参数变換群的有限方程．由(6·2·3)可見，为使这一变換群为运动群起見，必須有

$$g_{ij}(\bar{x})\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}=g_{kl}(x) \tag{6·2·38}$$

对任何的 x^i, t 成立．把这式子关于 t 微分，我們得

$$\frac{\partial g_{ij}(\bar{x})}{\partial\bar{x}^k}\xi^k(\bar{x})\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^h}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}+g_{ij}(\bar{x})\frac{\partial\xi^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^h}\frac{\partial\bar{x}^h}{\partial x^k}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}$$

$$+g_{ij}(\bar{x})\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial\xi^j(\bar{x})}{\partial\bar{x}^h}\frac{\partial\bar{x}^h}{\partial x^l}=0,$$

因此就有

$$\frac{\partial g_{ij}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\xi^k(\bar{x})+g_{hj}(\bar{x})\frac{\partial \xi^h(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}+g_{ih}\frac{\partial \xi^h(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}=0.$$

特别，令 $t=0$，我們就得到

$$\frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x^k}\xi^k(x)+g_{hj}(x)\frac{\partial \xi^h(x)}{\partial x^i}+g_{ih}\frac{\partial \xi^h(x)}{\partial x^j}=0 \quad (6\cdot2\cdot39)$$

对任何点成立．所以，如所論的单参数变换群为运动群，那末(6·2·39)成立；相反地，如(6·2·39)对于任何点成立，那末(6·2·38)式的左边和 t 无关，又当 $t=0$ 时，(6·2·38)左边化为 $g_{kl}(x)$，所以(6·2·38)对任何 t，x^i 成立．因此，我們得到：微分算子(6·2·37)所成的单参数变换群中的元素为运动的充要条件是(6·2·39)式成立．

如令

$$\xi_i=g_{ij}\xi^j,$$

又作 ξ_i 的共变导数

$$\xi_{i,j}=\frac{\partial \xi_i}{\partial x^j}-\Gamma^k_{ij}\xi_k,$$

那末，利用 Γ^k_{ij} 所滿足的(6·1·25')，就不难見到：(6·2·39)式等价于

$$\xi_{i,j}+\xi_{j,i}=0. \quad (6\cdot2\cdot40)$$

(6·2·39)和(6·2·40)均称为 Riemann 空間 V_n 的 Killing 方程．

最后，我們举出两种最簡单的齐性 Riemann 空間作为例子．

1° 任何 n 維局部李群的空間都可引入 Riemann 綫素而成为 n 維齐性 Riemann 空間，这是因为李群 G 是一个空間，如它的坐标为(u^α)，乘法关系为

$$\bar{u}^\alpha=\varphi^\alpha(v^\alpha,u^\beta), \quad (6\cdot2\cdot41)$$

已經指出，如令 v^α 为参数，G 可視作这个空間的变换群并且是单純可迁的，即从任一点(u)变到任一点$(\bar{u})$的变换是存在且

为唯一的，这时一点的迷向群只包含恒等变换，因而能使該点的相切空間上的任意二次正定形式保持不变．如 $\omega^\alpha(u, du)$ 为群的第二类不变形式，則 $\sum a_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta$ 为以 G 为运动群的 n 維 Riemann 空間，这里 $a_{\alpha\beta}$ 为任意常数，但 $(a_{\alpha\beta})$ 須为正定对称陣．这时运动群的参数数目为 n（但也有可能，这一 Riemann 空間还容許更大的运动群，故我們不能說这时完全运动的参数数目为 n）．

2° 容有最多参数运动群的齐性 Riemann 空間．

这时，我們假設可容許标形族为直交的，迷向群最多只可能为全直交群，因而其参数数目 $=\frac{n(n-1)}{2}$．由于迷向群与安定群同构，所以群的参数最多为 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个．因为

$$D\omega_j^i-[\omega_k^i, \omega_j^k]=\frac{1}{2}R_{jkl}^i[\omega^k, \omega^l], \qquad (6\cdot2\cdot42)$$

依 ω_j^i 的表达式及群的 Cartan-Maurer 方程可見 R_{jkl}^i 必为常数，且在运动群下不变，因此 R_{jkl}^i（同时是 R_{ijkl}）在迷向群下也不变，只要証明

$$\begin{aligned} &R_{ijkl}=0 \quad (i, j, k, l \text{ 互不相等}),\\ &R_{ijik}=0 \quad (i, j, k \text{ 互不相等}),\\ &R_{ijij}=R_{kjkj} \end{aligned} \qquad (6\cdot2\cdot43)$$

就可以了，因为这几个式子联合在一起就是

$$R_{ijkl}=k_0(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}), \qquad (6\cdot2\cdot44)$$

这里我們还利用 (6·1·40) 的第一个式子，利用它才可見到 $R_{ijij}=k_0$，k_0 和 i，j 无关．

R_{ijkl} 在迷向群下不变的充要条件已知为

$$R_{hjkl}c_i^h+R_{ihkl}c_j^h+R_{ijhl}c_k^h+R_{ijkh}c_l^h=0 \qquad (6\cdot2\cdot45)$$

对任何反称的 c_m^h 都成立．

i) 当 $i, j, l \neq$, $k=i$, 且选 c_m^k 使

$$c_j^i=-c_i^j=1,$$

其余为零,代入(6·2·45)就有

$$R_{ljil}=0 \quad (i, j, l\neq). \tag{6·2·46}$$

ii) 当 $i=k$; $i, j, l\neq$, 又取

$$c_m^i=-c_i^m=1 \quad (m\neq i, j, l),$$

利用(6·2·45)得到

$$R_{mjil}+R_{mlij}=0, \tag{6·2·47}$$

又写出(6·1·40)的第二式

$$R_{mjil}+R_{mlji}+R_{mjil}=0, \tag{6·2·48}$$

将上面二式相减,得

$$R_{mlij}=\frac{1}{2}R_{mjil},$$

代入(6·2·43)得到

$$R_{mjil}=0 \quad (i, j, m, l\neq).$$

iii) 选 $k=p$, $j=l(i, p, l\neq)$, 又选

$$c_i^p=-c_p^i=1,$$

由(6·2·41)就得到

$$R_{plpl}=R_{ilil}.$$

記它为 k_0, 这就是(6·2·43)中第三式, 因而得知(6·2·44)成立, 而得到

定理 3 容有最多参数运动群的齐性 Riemann 空間是常曲率空間.

視 k_0 的不同,常曲率空間可分为三类. $k_0=0$ 时卽为欧氏空間; $k_0>0$ 时为正常曲率空間,正常曲率空間可在 $n+1$ 維欧氏空間的球面上实現; $k_0<0$ 时为負常曲率空間, 負常曲率空間能在向量长度公式为二次形式

$$f(x, x) = (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 - (x^{n+1})^2$$

的拟欧氏空間中的超曲面

$$(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 - (x^{n+1})^2 = c^2$$

上实現．普通所謂的非欧空間就是指这两种常曲率空間[1]．

欧氏空間容許 $\frac{n(n+1)}{2}$ 参数运动群是已知的事实，又 $n+1$ 維空間的轉动群必为 n 維正常曲率空間的运动群，而所举出的拟欧氏空間的 Lorentz 变换群必为負常曲率空間的运动群，所以 n 維的常曲率空間也的确容有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 参数的运动群．

§ 6·3 Riemann 空間的和乐群及其若干应用

在这节中我們还是要討論一般的 Riemann 空間的若干性质，在后文中，将多次地利用到这些性质．

設 V_n 为一 Riemann 空間，我們利用自然标形进行討論．首先要説明在点 p 的一个向量 $\underset{0}{\lambda^i} I_0$ 沿光滑曲綫 C 的平行移动的概念．設曲綫 C 的方程为 $x^i = x^i(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$，又 $t = c\,(a \leqslant c \leqslant b)$ 对应于点 p，在 p 点已給出一向量 $\underset{0}{\lambda^i} I_i$，我們要求在曲綫 C 上点点定义的向量，使得这一列的向量中任意两个无限小邻近向量都是相互平行的．为此，我們設这一列向量的反变支量由方程 $\lambda^i(t)$ 表示，那末由 § 6·1 的討論可知，函数 $\lambda^i(t)$ 应滿足方程

$$\frac{d\lambda^i(t)}{dt} + \Gamma^i_{jk}(x(t))\lambda^j(t)\frac{dx^k}{dt} = 0, \qquad (6·3·1)$$

和初始条件

$$\lambda^i(c) = \lambda^i_0.$$

这一微分方程組的初值問題有唯一的解，且在 $a \leqslant t \leqslant b$ 均有意义（因为方程(6·3·1)关于未知函数 $\lambda^i(t)$ 为綫性的）．我們就称

---

[1] 这些事項的証明見 Eisenhart L. P. [1] 第五章．

这样所得的一列向量为 p 点的向量 $\overset{0}{\lambda}{}^i I_i$ 沿曲綫 C 的平行移动. 曲綫 C 也可以是分段光滑的，这时平行移动也是分段制作的.

沿曲綫 C 的平行移动，实际上是把曲綫上每点的相切空間之間制作出一个綫性对应，而且还保持数量积不变.

利用平行移动，我們可以引入 Riemann 空間的"和乐群"的概念.

在 Riemann 空間 V_n 中，取一点 p，作以 p 为始点，又以 p 为終点的閉环路. 我們假設这个环路由有限段光滑曲綫弧构成. 把 p 点切空間中向量沿这环路作平行移动，又回到 p 点来，得到 p 点切空間到自身的一个旋轉. 任意二个閉环路連接起来也还是一个閉环路，它們的逆环路也是一个閉环路，所以如作出所有可能的閉环路所对应的 p 点相切空間旋轉就得到一个直交群的子群，称为点 p 的和乐群[1]. 容易証明，空間 V_n 中不同两点的和乐群必为同构(我們假設 V_n 为連通的，即任意两点必能用光滑的曲綫弧連接，在局部情况下，这往往是不言而喻的).

由和乐群的性质可以推出空間的許多性质. 我們先考察，和乐群有不变向量时空間 V_n 有哪些性质. 現設 $\overset{0}{\lambda}{}^i$ 为在 p 点的一个向量，为該点的和乐群的不变向量. p_1 为 V_n 中任一点. 把 p 和 p_1 用一根光滑曲綫弧 C 連結起来，把向量 $\overset{0}{\lambda}{}^i$ 沿 C 平行移动，得到 p_1 点的一个向量 λ^i，我們說，λ^i 和曲綫弧 C 的选取无关. 事实上，設我們用曲綫弧 C' 来代替 C，向量 $\overset{0}{\lambda}{}^i$ 沿 C 平行移动到 p_1 得到 λ^i，又依 C' 的反方向把它从 p_1 移动到 p，因为 $\overset{0}{\lambda}{}^i$ 在和乐群下为不变，所以我們重新得到向量 $\overset{0}{\lambda}{}^i$. 因此把 $\overset{0}{\lambda}{}^i$ 沿 C' 平行移动，在 p_1 点也得到向量 λ^i. 依此方法就得到在空間 V_n 的一个向量場，它有如下性质：在 V_n 中任作一光滑曲綫，在此曲綫上

[1] 这里定义的和乐群，有些作者称为齐次和乐群，自然，我們也只是用局部观点来討論它. 关于和乐群的一般討論可見 Lichnerowicz [1].

向量場的向量是沿此曲綫平行的一列向量，这样的向量場称为平行向量場，因此我們有

定理 1 一向量为和乐群的不变向量場的充要条件是它属于 V_n 的一个平行向量場.

完全类似地也有

定理 2 p 点的相切空間的一个平面为和乐群的不变平面的充要条件是該平面属于 V_n 的平行平面場.

这里平行平面場的意义是指在 V_n 的各点的相切空間上均有一个确定的平面，而沿任何一根光滑曲綫作相切空間的平行移动时，这种平面都相互对应.

我們再进一步討論容許平行平面場的 Riemann 空間 V_n. 首先可見到，設 E_m 为一平行平面場，那末 E_n 的直交补 E_{n-m} 也为平行平面場. 这因为，在平行移动之下直交性是能够保持的，E_m 旣能自相对应，那末它的直交补也能自相对应.

选取直交标形 e_i，使 $e_1, \cdots, e_m$ 属于 E_m；$e_{m+1}, \cdots, e_n$ 属于 E_{n-m}. 这时成立

$$dp=\omega^i e_i,\quad de_i=\omega_i^j e_j. \tag{6·3·2}$$

依 E_m 和 E_{n-m} 的平行性，我們有

$$\omega_{i'}^{i''}=0,\quad \omega_{i''}^{i'}=0$$

$$(i'=1, 2, \cdots, m;\ i''=m+1, \cdots, n). \tag{6·3·3}$$

考察 Pfaff 方程組

$$\omega^{i'}=0,$$

它包含 m 个独立方程，且相应于 V_n 中的平面場 E_{n-m}，因为

$$D\omega^{i'}-[\omega^j, \omega_j^{i'}]=D\omega^{i'}-[\omega^{j'}, \omega_{j'}^{i'}]=0,$$

所以这一Pfaff方程組完全可积，这就是說，平面素場 E_{n-m} 为和乐的；同样，平面素場 E_m 也为和乐的. 选空間的坐标 $x^1, \cdots, x^n$,

使 $x^1, \cdots, x^m$ 为 $\omega^{i'}=0$ 的独立的初积分, $x^{m+1}, \cdots, x^n$ 为 $\omega^{i''}=0$ 的独立的初积分,那末空間的綫素 ds^2 可写作

$$ds^2 = g_{i'j'}(x)dx^{i'}dx^{j'} + g_{i''j''}(x)dx^{i''}dx^{j''}. \qquad (6\cdot 3\cdot 4)$$

这时曲面族 $V_{n-m}: x^{i'}=\text{const}$ 的切平面为 E_{n-m}, 曲面族 $V_m: x^{i''}=\text{const}$ 的切平面为 E_m. E_{n-m} 中的向量的特点是 $\lambda^{i'}=0$, 沿任何曲面平行移动时 $\lambda^{i'}=0$ 应該保持,所以有

$$\Gamma^{i'}_{j''k}\lambda^{j''}\frac{dx^k}{dt}=0.$$

因为 $\lambda^{j''}$, $\dfrac{dx^k}{dt}$ 为任意, 所以有

$$\Gamma^{i'}_{j''k}=0.$$

利用 Γ^i_{jk} 的表达式(6·1·30),并注意到 $g^{i'i''}=0, g_{i'i''}=0, \det|g^{i'j'}|\neq 0$, 我們就有

$$\frac{\partial g_{j''k''}}{\partial x^{i'}}=0.$$

同样也有

$$\frac{\partial g_{j'k'}}{\partial x^{i''}}=0.$$

这表示(6·3·4)中的 $g_{i'j'}(x)$ 只依賴于 $x^{k'}$, $g_{i''j''}(x)$ 只依賴于 $x^{k''}$, 因此

$$ds^2 = g_{i'j'}(x^{k'})dx^{i'}dx^{j'} + g_{i''j''}(x^{k''})dx^{i''}dx^{j''}. \qquad (6\cdot 3\cdot 5)$$

这样的空間称为乘积空間,記为 $V_n = V_m \times V_{n-m}$, 因而我們又得到

定理 3 如 V_n 的和乐群有不变平面 $E_m (m\neq 0, n)$,那末 V_n 必为乘积空間.

当 V_n 的相切空間分解为一組 s 个相互直交的和乐群的不变平面的直和时, 那末 V_n 也分解为 s 个 Riemann 空間的乘积空間. 特别成立

推論 1 当 V_n 的和乐群有 m 个独立的不变向量，或者說 V_n 有 m 个独立的平行向量場时，V_m 的綫素必可写作

$$ds^2=(dx^1)^2+\cdots+(dx^m)^2+g_{i''j''}(x^{k''})dx^{i''}dx^{j''}$$
$$(i'',\ j'',\ k''=m+1,\ \cdots,\ n). \qquad (6\cdot3\cdot6)$$

【証】 因为 V_n 的和乐群既有 m 个不变的独立向量，那末还可选取 m 个相互直交的不变向量，每一不变向量均可作成一个不变的一維平面 $F_a(a=1,\cdots,m)$，而和所有这些不变向量相直交的向量全体也构成一个不变平面 E_{n-m}. 显然 p 点的切空間分解为和乐群的不变平面 $F_1,\ F_2,\ \cdots,\ F_m,\ E_{n-m}$ 的直和，这些不变平面为相互直交的，因此得到綫素 $(6\cdot3\cdot6)$.

推論 2 V_n 为欧氏空間的充要条件是它的和乐群只包含恒等变换.

【証】 如和乐群只包含恒等变换，則它有 n 个独立的不变向量，应用推論 1 就得

$$ds^2=(dx^1)^2+\cdots+(dx^n)^2,$$

因此为欧氏空間. 又欧氏空間的每一向量显然都属于一个平行向量場，因此和乐群也确实使每一向量不变.

并非任何 Riemann 空間都是两个維数低一些的 Riemann 空間的乘积，特别，我們有

定理 4 非欧氏式的常曲率空間一定不是乘积空間.

【証】 設常曲率空間 V_n 的曲率为 $k_0\neq0$. 又如果 V_n 为乘积空間，則 V_n 的綫素可写成

$$ds^2=g_{i'j'}(x^{k'})dx^{i'}dx^{j'}+g_{i''j''}(x^{k''})dx^{i''}dx^{j''}.$$

通过計算可以直接証明，曲率張量 R_{ijkl} 中只有 $R_{i'j'k'l'}$ 及 $R_{i''j''k''l''}$ 可以不为零；但另一方面，由于空間为常曲率的，

$$R_{i'j'i'j''}=k_0(g_{i'i'}g_{j'j''}-g_{i'j''}g_{i'j'})=k_0g_{i'i'}g_{j'j''}\neq0,$$

所以发生矛盾.

由这一定理可以見到常曲率空間不容許平行平面場，特别，也不容許平行向量場.

再介紹 Riemann 空間的相似对应和相似变换的概念.

設两个 Riemann 空間 $\overline{V}_n$ 与 V_n 能建立点与点之間的一一对应，且当对应点采取同一坐标时成立

$$\overline{g}_{ij}(x)dx^i dx^j = c^2 g_{ij}(x)dx^i dx^j \quad (c \neq 0 \text{ 常数}), \qquad (6\cdot3\cdot7)$$

則称此对应为相似对应. 这里 $\overline{g}_{ij}(x)dx^i dx^j$ 与 $g_{ij}(x)dx^i dx^j$ 分別为 $\overline{V}_n$ 与 V_n 的綫素. c^2 称为相似对应的系数.

由 $\overline{g}_{ij} = c^2 g_{ij}$ 知 $\overline{g}^{ij} = \frac{1}{c^2} g^{ij}$，計算 V_n 与 $\overline{V}_n$ 的 Christoffel 記号，可得

$$\overline{\Gamma}^i_{jk}(x) = \Gamma^i_{jk}(x). \qquad (6\cdot3\cdot8)$$

因此，在相似对应下，平行性保持不变[1]. 由此也可見到，在相似对应下，和乐群也保持不变.

特别，V_n 到自身的相似对应称为相似变换. 如 V_n 的坐标为 (x)，相似变换方程为 $\overline{x}^i = f^i(x^j)$，則相似变换的条件 (6·3·7) 可改写为

$$g_{ij}(\overline{x})d\overline{x}^i d\overline{x}^j = c^2 g_{ij}(x)dx^i dx^j. \qquad (6\cdot3\cdot7')$$

当 V_n 容許单参数变换群

$$\overline{x}^i = f^i(x, t)$$

且成立

$$g_{ij}(\overline{x})d\overline{x}^i d\overline{x}^j = c^2(t) g_{ij}(x)dx^i dx^j \qquad (6\cdot3\cdot9)$$

时，称这单参数变换群为相似变换群.

在这里我們要介紹下面的一个簡单而有用的結果，它对齐性 Riemann 空間的綫素的决定和 Riemann 空間的相似群的研

---

[1] 两 Riemann 空間如能建立一一对应，使得向量的平行性保持，称这对应为仿射对应；V_n 到自身的仿射对应称为仿射变换. 相似对应是一种特殊的仿射对应，相似变换是一种特殊的仿射变换. 在仿射对应下，和乐群也保持不变.

究很起作用(見谷超豪 [3], [5]).

定理 5 齐性 Riemann 空間如容許非平凡的相似群, 則空間必为欧氏的.

【証】 設 V_n 为齐性 Riemann 空間, 又存在非平凡的相似变换, 相似系数为 $\alpha(\alpha<1)$, 它把点 p 变到 p_1, 由于 V_n 是齐性空間, 所以又存在一个运动把点 p_1 变回到 p. 作出这两个变换的乘积, 就得到一个使点 p 不变的相似变换 g, 相似系数为 α. 現設 C_0 为以 p 点为始点, 也以 p 点为終点的閉环路, C_0 經变换 g 后变为 C_1, C_1 也以 p 为始点与終点. 又 C_1 經过 g 后变为 C_2, $\cdots$. 显然, 这些环路最后将收縮于一点 [1]. 設 C_i 对应和乐群中元素 g_i $(i=0, 1, \cdots)$, 由于相似变换下不改变和乐群中元素, 因而

$$g_0=g_1=g_2=\cdots=g_m=\cdots.$$

另一方面, 当 m 增大时, C_m 可变为非常小的环路, 因而 g_m 就会与恒等变换无限接近, 即 $\{g_m\}$ 以恒等变换为极限, 但 $g_0=\cdots=g_m=\cdots$, 故 g_0 必須就是恒等变换. 由于 C_0 是任意取的, 故知空間的和乐群只有一个恒等元素, V_n 是欧氏空間, 这就得出了所需要的結論.

§ 6·4 作为乘积空間的齐性 Riemann 空間

在本节中, 我們要介紹从两个齐性 Riemann 空間得出新的齐性空間的两种方法.

---

[1] 設 p 为 V_n 中一点, a^i 为过 p 点的任一个单位切向量, 作过 p 点和 a^i 相切的测地綫, 依 a^i 的方向量一弧长 s, 得到一点 Q. 当 a^i 和 s 变动时, Q 可以取到 p 的某一邻域中的任意点, 令 $x^i=a^is$ 为該点的坐标, 这样的坐标变为点 p 的法坐标. 在法坐标下, 令 $a^i=\mathrm{const}$, 而 s 变动, 那末方程 $y^i=a^is$ 就代表一根測地綫, 在法坐标下, 容易見到运动群和相似群的迷向群和安定群有同一解析表达式.

利用 Riemann 空間在 p 点的法坐标, 可以严格地証明正文中所述的事实.

設 Riemann 空間 V_q 与 V_{n-q} 的綫素各为

$$ds_1^2=g_{i'j'}(x^{k'})dx^{i'}dx^{j'} \quad (i', j', k'=1, 2, \cdots, q),$$

$$ds_2^2=g_{i''j''}(x^{k''})dx^{i''}dx^{j''} \quad (i'', j'', k''=q+1, \cdots, n),$$

前面已指出，綫素为

$$ds^2=g_{i'j'}(x^{k'})dx^{i'}dx^{j'}+g_{i''j''}(x^{k''})dx^{i''}dx^{j''} \qquad (6\cdot4\cdot1)$$

的 Riemann 空間 V_n 称为 V_q 与 V_{n-q} 的乘积空間，并記为

$$V_n=V_q\times V_{n-q}.$$

特別，如 V_q 与 V_{n-q} 均为齐性 Riemann 空間，設其运动群为 G_1 及 G_2，則綫素 V_n 容有形如

$$\begin{aligned}\bar{x}^{i'}&=\varphi^{i'}(x^{j'}, u^{\alpha'}),\\ \bar{x}^{i''}&=\varphi^{i''}(x^{j''}, u^{\alpha''})\end{aligned} \qquad (6\cdot4\cdot2)$$

的运动群，于此 $\varphi^{i'}$ 为 G_1 中的一般变换，$\varphi^{i''}$ 为 G_2 中的一般变换，又 $u^{\alpha'}$, $u^{\alpha''}$ 分别为相互无关的二組参数．由于 G_1 与 G_2 在 V_q 与 V_{n-q} 中分別是可迁的，因而 V_n 中的运动群 (6·4·2) 也是可迁的，这样，我們就用乘积的方法合成一个新的齐性 Riemann 空間．

由(6·4·2)式可見两个齐性 Riemann 空間乘积所成的齐性 Riemann 空間必容許可分为直积的运动群，因而它們的迷向群也分为直积．但是相反地，如果一个齐性 Riemann 空間的迷向群分为两个互补平面上旋轉群的直积时，这个齐性 Riemann 空間并不一定分为直积，在后文中我們将看到很多这种例子． 我們在这里介紹一个有用的結果(Wakakuwa H. [1])．

定理 1 若齐性 Riemann 空間 V_n 的迷向群分解为独立地作用在切空間的互补的子空間 E_q 与 E_{n-q} 中的两个旋轉群的直积，且迷向群沒有不变向量場，則齐性 Riemann 空間 V_n 必为两个齐性 Riemann 空間的乘积．

我們可选直交可容許标形使 $e_{i'}(i'=1, 2, \cdots, q)$ 和 $e_{i''}(i''$

$=q+1, \cdots, n$)分别成为 E_q 和 E_{n-q} 上的基向量. 由于迷向群分为直积,因而它的李代数的基可选为

$$C_{\rho'}=\begin{pmatrix} c^{i'}_{j'\rho'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{\rho''}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c^{i''}_{j''\rho''} \end{pmatrix}, \tag{6·4·3}$$

$$(i', j'=1, \cdots, q; \quad i'', j''=q+1, \cdots, n),$$

这里 $c^{i'}_{j'\rho'}$ 与 $c^{i''}_{j''\rho''}$ 分别为迷向群作用在 E_q 与 E_{n-q} 上所成的群(称为誘导群)的李代数的基,这时

$$\begin{aligned} D\omega^{i'}&=\frac{1}{2}c^{i'}_{jk}[\omega^j, \omega^k]+c^{i'}_{j'\rho'}[\omega^{j'}, \omega^{\rho'}], \\ D\omega^{i''}&=\frac{1}{2}c^{i''}_{jk}[\omega^j, \omega^k]+c^{i''}_{j''\rho''}[\omega^{j''}, \omega^{\rho''}]. \end{aligned} \tag{6·4·4}$$

我們已經指出,由于齐性 Riemann 空間是化約的,因而 Jacobi 方程(5·3·7)化为

$$c^i_{lm}c^k_{i\rho}+c^k_{il}c^i_{m\rho}-c^k_{im}c^i_{l\rho}=0. \tag{6·4·5}$$

在(6·4·5)中令 $k=k'$, $l=l'$, $m=m''$, $\rho=\rho''$, 得到

$$c^{k'}_{i''l'}c^{i''}_{m''\rho''}=0.$$

由于迷向群沒有不变向量,所以

$$c^{k'}_{l''l'}=0;$$

类似地得

$$c^{k''}_{l'l''}=0.$$

又在(6·4·5)中置 $k=k''$, $l=l'$, $m=m'$, $\rho=\rho'$,再利用迷向群沒有不变向量这一事实就可得到

$$c^{i''}_{l'm'}=0;$$

类似地有

$$c^{i'}_{l''m''}=0.$$

这样,(6·4·4)就化簡为

$$D\omega^{i'}=\frac{1}{2}c^{i'}_{j'k'}[\omega^{j'}, \omega^{k'}]+c^{i'}_{j'\rho'}[\omega^{j'}, \omega^{\rho'}],$$

$$D\omega^{i''}=\frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}[\omega^{j''}, \omega^{k''}]+c^{i''}_{j''\rho''}[\omega^{j''}, \omega^{\rho''}].$$

利用 E. Cartan 的引理(§6·2)可知 $\sum_{i'}(\omega^{i'})^2$ 为 $x^{i'}$, $dx^{i'}$ 的二次型，$\sum_{i''}(\omega^{i''})^2$ 为 $x^{i''}$, $dx^{i''}$ 的二次型，而 $x^{i'}$ 为 $\omega^{i'}=0$ 的初积分，$x^{i''}$ 为 $\omega^{i''}=0$ 的初积分，因而 V_n 的綫素为

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \sum_{i'}(\omega^{i'})^2 + \sum_{i''}(\omega^{i''})^2 \\
&= g_{i'j'}(x^{k'})dx^{i'}dx^{j'} + g_{i''j''}(x^{k''})dx^{i''}dx^{j''}.
\end{aligned}
$$

定理証毕.

我們的証明大部分是重复了 §5·4 的定理 4 的論述，事实上，那个定理可以看成为这里所叙述的定理的推广.

齐性 Riemann 空間 G/H 以 G 为运动群，但也可能容許比 G 更大的运动群. 我們称一个 Riemann 空間所能容許的参数数目最多的运动群为完全运动群. 显然，在局部的意义下，完全运动群是唯一决定的.

値得注意的是乘积的齐性 Riemann 空間(6·4·1)的完全运动群未必是(6·4·2)，例如当

$$ds_1^2 = (dx^1)^2 + g_{a'b'}(x^{c'})dx^{a'}dx^{b'} \quad (a',\ b',\ c' = 2,\ \cdots,\ q),$$

$$ds_2^2 = (dx^{q+1})^2 + g_{s't'}(x^{p'})dx^{s'}dx^{t'} \quad (s',\ t',\ p' = q+2,\ \cdots,\ n)$$

时，其乘积空間具綫素

$$
\begin{aligned}
ds^2 = g_{a'b'}(x^{c'})dx^{a'}dx^{b'} + (dx^1)^2 + (dx^{q+1})^2 \\
+ g_{s't'}(x^{p'})dx^{s'}dx^{t'}.
\end{aligned}
\tag{6·4·6}
$$

显然可見，这空間容有这样的运动：它是由 2 維空間 $(dx^1)^2 + (dx^{q+1})^2$ 中的运动与 $\bar{x}^{a'} = x^{a'}$, $\bar{x}^{s'} = x^{s'}$ 在一起所組成的，但这个运动并不属于 (6·4·2)，因而这时 V_q 与 V_{n-q} 中运动群的直积(6·4·2)并不是 V_n 的完全运动群.

当乘积空間 V_n 的运动属于 V_q 与 V_{n-q} 的完全运动群的直积时，我們称这运动为非混合的；如 V_n 的运动不是 V_q 与 V_{n-q} 的运动的直积，則称它为 V_n 的混合运动. Г. И. Кручкович 研究乘积空間的混合运动得到了 (Кручкович Г. И. [1])

定理 2　如果乘积 Riemann 空間 $V_n(V_n=V_q\times V_{n-q})$ 容許混合运动，則 V_n 的綫素必可化成为

$$ds^2=\sum_{s=1}^{l}(dx^s)^2+d\bar{s}_1^2+d\bar{s}_2^2, \qquad (6\cdot4\cdot7)$$

使这时 V_n 可視为三个 Riemann 空間的乘积，其中第一个是欧氏的，且对 V_n 的綫素的这样分解而言，V_n 的每个运动都是非混合的[1]．(这里 $d\bar{s}_1^2$, $d\bar{s}_2^2$ 是二个 Riemann 空間的綫素形式．)

【証】　如所知，Riemann 空間的单参数变换群为运动群的充要条件是成立 Killing 方程

$$\xi^k\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+g_{ik}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^j}+g_{kj}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^i}=0, \qquad (6\cdot4\cdot8)$$

对于乘积空間 V_n，Killing 方程(6·4·8)可写为下列三組：

$$\begin{aligned}
&\text{A)}\quad \xi^{k'}\frac{\partial g_{i'j'}}{\partial x^{k'}}+g_{j'k'}\frac{\partial\xi^{k'}}{\partial x^{i'}}+g_{i'k'}\frac{\partial\xi^{k'}}{\partial x^{j'}}=0,\\
&\text{B)}\quad g_{i'k'}\frac{\partial\xi^{k'}}{\partial x^{j''}}+g_{j''k''}\frac{\partial\xi^{k''}}{\partial x^{i'}}=0, \qquad (6\cdot4\cdot9)\\
&\text{C)}\quad \xi^{k''}\frac{\partial g_{i''j''}}{\partial x^{k''}}+g_{i''k''}\frac{\partial\xi^{k''}}{\partial x^{j''}}+g_{k''j''}\frac{\partial\xi^{k''}}{\partial x^{i''}}=0
\end{aligned}$$

$$(i',\ j',\ k'=1,\ 2,\ \cdots,\ q;\ i'',\ j'',\ k''=q+1,\ \cdots,\ n).$$

由此可見，对固定的 $x^{i''}$，$X=\xi^{i'}\dfrac{\partial}{\partial x^{i'}}$ 是 V_q 中的运动的微分算子；对固定的 $x^{i'}$，$Y=\xi^{i''}\dfrac{\partial}{\partial x^{i''}}$ 是 V_{n-q} 中运动的微分算子．(6·4·9)也可改写成

$$\begin{aligned}
&\text{A)}\quad \xi_{i',j'}+\xi_{j',i'}=0,\\
&\text{B)}\quad \frac{\partial\xi_{i'}}{\partial x^{j''}}+\frac{\partial\xi_{j''}}{\partial x^{i'}}=0, \qquad (6\cdot4\cdot10)\\
&\text{C)}\quad \xi_{i'';j''}+\xi_{j'';i''}=0.
\end{aligned}$$

---

[1] 这就是每一运动必属于三个 Riemann 空間的完全运动群的直积，这三个空間的綫素为(6·4·7)左边的三項．

这里記号“,”表示 V_q 中的共变微分，記号“;”表示 V_{n-q} 中的共变微分．又从(6·4·10)式 B) 中可見，当 $\xi_{i'}$ 不含 $x^{j''}$ 时 $\xi_{j''}$ 也不含 $x^{i'}$．我們設 ξ^i 所生成的单参数运动群是混合运动，因而 $\xi_{i'}$ 真正依賴于 $x^{i''}$，$\xi_{i''}$ 真正依賴 $x^{i'}$．

由(6·4·10)，A)式可得

$$\xi_{i',j'}=\frac{1}{2}(\xi_{i',j'}-\xi_{j',i'})=\frac{1}{2}(\partial_{j'}\xi_{i'}-\partial_{i'}\xi_{j'}),\quad (6\cdot4\cdot11)$$

将(6·4·10)的 B) 式关于 k' 微分又减去 i', k' 相交換所得的式子，我們就得到

$$\partial_{j''}(\partial_{k'}\xi_{i'}-\partial_{i'}\xi_{k'})=0.$$

因而由(6·4·11)，

$$\xi_{i',j'}=A_{i'j'}(x^{k'}).\quad (6\cdot4\cdot12)$$

类似地得到

$$\xi_{i'';j''}=B_{i''j''}(x^{k''}).\quad (6\cdot4\cdot13)$$

我們将(6·4·13)关于 $x^{k'}$ 微分，就成立

$$(\partial_{k'}\xi_{i''})_{;j''}=0.\quad (6\cdot4\cdot14)$$

把(6·4·10)的 B)式关于 $x^{k''}$ 共变微分再利用(6·4·14)就得到

$$(\partial_{j''}\xi_{i'})_{;k''}=0,$$

或改写成

$$\xi_{i';j''k''}=0,\quad (6\cdot4\cdot15)$$

因而对固定的 i'，$\xi_{i';j''}$ 是 V_{n-q} 的平行向量場．类似地可得

$$\xi_{i'',j'k'}=0,\quad (6\cdot4\cdot16)$$

因而对固定的 i''，$\xi_{i'',j'}$ 是 V_q 中的平行向量場．因此当乘积空間容許混合运动时，V_q 与 V_{n-q} 均有平行向量場．依照具有平行向量場的 Riemann 空間的性質(§6·3 推論 1)，V_q 与 V_{n-q} 的綫素均可化为

$$ds_1^2=(dx^1)^2+g_{a'b'}(x^{c'})dx^{a'}dx^{b'}\quad (a',\ b',\ c'=2,\ \cdots,\ q),$$

$$ds_2^2=(dx^{q+1})^2+g_{s''t''}(x^{p''})dx^{s''}dx^{t''}$$
$$(s'',\ t'',\ p''=q+2,\ \cdots,\ n),$$

因此 V_n 的綫素可化为

$$ds^2=(dx^1)^2+(dx^{q+1})^2+g_{a'b'}(x^{c'})dx^{a'}dx^{b'}$$
$$+g_{s''t''}(x^{p''})dx^{s''}dx^{t''}.$$

如果 ds^2 这样分解(即上式中一、二項,三項,四項三部分)后还存在混合运动,那末可以继續运用以前的步驟,把綫素中的"欧氏部分"进一步扩張,而最后就得綫素(6·4·7),它已不再容許混合运动.

我們在 § 6·10 中将应用这个定理来判定某些乘积的齐性 Riemann 空間的运动群是否为完全运动群.

§ 6·5　迷向群具不变向量的齐性 Riemann 空間

依迷向群来研究齐性 Riemann 空間时,我們必然会遇到迷向群具不变向量的空間,它构成一类相当广泛的齐性 Riemann 空間,而且,在制作容許不可迁运动群的 Riemann 空間时,也需要研究清楚这种具不变向量場的齐性 Riemann 空間. K. Yano 在[2]中曾研究过迷向群只有一个不变向量,而且在其直交补上成为全直交群 $O(n-1)$ 的情形. M. Kurita[1] 研究过有 q 个不变向量場而迷向群实质上为 $O(n-q)$ 的情形. 在这里,我們研究比較一般的情形: 迷向群具有 q 个独立的不变向量而在它們的直交补上誘导一不可約的旋轉群(谷超豪 [3], [5]).

同时指出,在一点 M 的迷向群如有不变向量 e,那末必存在空間 V_n 的一个向量場,使其中的向量在运动群 G_r 作用之下相互变化(这样的向量場称为不变向量場). 事实上,在运动群 G_r 下,向量 e 所能变到的向量的集合 Σ 就組成这样的不变向量場. 因为 G_r 可迁,故任意点 M_1 必有含在 Σ 中的向量,又如存在

$g_1 \in G_r$, $g_2 \in G_r$, 使 M 点变到 M_1 点,而使 e 变为 M_1 点不同的向量 e_1, e_2, 則 M 点安定群中元素 $g_2^{-1}g_1$ 就将使 e 变为另一向量,这与假設矛盾,所以 Σ 必为一向量場,且为 G_r 的不变向量場. 因而,齐性 Riemann 空間具有 q 个綫性独立的不变向量場是等价于其迷向群能使一 q 維平面 E_q 中任一向量不变,而它的直交补 E_{n-q} 亦为迷向群的 $n-q$ 維不变平面. 这时迷向群实质上表示为 E_{n-q} 中的一个旋轉群 H.

我們先来証明如下的基本引理.

引理　設 V_n 为正好具有 q 个独立的不变向量場的齐性 Riemann 空間, 則可选取适当可容許标形族及 Pfaff 式 ω^i, ω^ρ, 使得

$$D\omega^{i'}=\frac{1}{2}c^{i'}_{j'k'}[\omega^{j'}, \omega^{k'}]+c^{i'}_{j''k''}[\omega^{j''}, \omega^{k''}],$$

$$D\omega^{i''}=\frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}[\omega^{j''},\omega^{k''}]+c^{i''}_{j''k'}[\omega^{j''},\omega^{k'}]+c^{i''}_{j''\rho}[\omega^{j''},\omega^{\rho}] \quad (6\cdot5\cdot1)$$

$$(i'=1, \cdots, q;\ i'', j''=q+1, \cdots, n),$$

且成立

（i）对固定的 i', $c^{i'}_{j''k''}$ 为群 H 的不变張量,即为群 H 的变換旋轉群的李代数中的元素. 为方便計, 我們把 $n-q$ 阶方陣 $(c^{i'}_{j''k''})$ 記为 $C^{i'}$.

（ii）对固定的 k', 方陣 $C_{k'}=(c^{i''}_{j''k'})$ 为群 H 的变換綫性群的李代数中的元素.

【証】　当选取直交标形 $e_1, \cdots, e_q, e_{q+1}, \cdots, e_n$, 使 $e_1, \cdots, e_q$ 为不变向量时,則有

$$c^{i'}_{j\rho}=c^{j}_{i'\rho}=0,$$

此处矩陣 $A_\rho=(c^{i''}_{j''\rho})$ 为 H 的李代数的基.

因齐性 Riemann 空間为化約的,所以我們可利用(6·2·32), 在这式子中令 $k=k'$, $l=l'$, $m=m''$, 即得

$$c^{i''}_{m''\rho}c^{k'}_{i''l'}=0.$$

因 H 在 E_{n-q} 中无不变向量，所以有

$$c^{k'}_{i''l'}=0. \tag{6·5·2}$$

再在(6·2·32)式中令 $k=k''$, $l=l'$, $m=m'$, 即得

$$c^{i''}_{l'm'}c^{k''}_{i''\rho}=0.$$

由此推得

$$c^{i''}_{l'm'}=0. \tag{6·5·3}$$

所以成立

$$\begin{aligned} D\omega^{i'}&=\frac{1}{2}c^{i'}_{j'k'}[\omega^{j'},\ \omega^{k'}]+c^{i'}_{j''k''}[\omega^{j''},\ \omega^{k''}],\\ D\omega^{i''}&=\frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}[\omega^{j''},\ \omega^{k''}]+c^{i''}_{j''k'}[\omega^{j''},\ \omega^{k'}]\\ &\quad+c^{i''}_{j''\rho}[\omega^{j''},\ \omega^{\rho}]. \end{aligned} \tag{6·5·4}$$

我們再在(6·2·32)式中令 $k=k'$, $l=l''$, $m=m''$, 即得

$$c^{k'}_{i''l''}c^{i''}_{m''\rho}+c^{k'}_{m''i''}c^{i''}_{l''\rho}=0. \tag{6·5·5}$$

故可知，当固定 k' 时，$c^{k'}_{m''l''}$ 为 H 的不变張量. 另一方面，上式可改写为矩陣形式

$$C^{k'}A_{\rho}-A_{\rho}C^{k'}=0. \tag{6·5·6}$$

又因 $C^{k'}$ 为反称陣，所以这表示 $C^{k'}$ 所生成的旋轉群与群 H 可交换，故(i)得証.

最后，在(6·2·32)式中令 $k=k''$, $l=l''$, $m=m'$, 即得

$$c^{k''}_{i''\rho}c^{i''}_{l''m'}-c^{k''}_{i''m'}c^{i''}_{l''\rho}=0,$$

即

$$A_{\rho}C_{m'}-C_{m'}A_{\rho}=0. \tag{6·5·7}$$

这样就証明了(ii).

在詳細討論具不变向量場的齐性 Riemann 空間以前，我們再指出这类空間的一个几何性质. 在第五章中已看到平面場 E_q 为和乐的(也可直接从(6·5·4)看出)，即存在 ∞^{n-q} 的 q 維曲

面 V_q，它們以 E_q 为切平面素，且这些 V_q 是非素性曲面．在这里将进而証明这些 V_q是空間的全測地曲面．这就是，把 V_q 作为一 Riemann 空間时[1]，它的任一測地綫也就是 V_n 的測地綫．

由引理的証明中可見，在 V_q 上成立 $\omega^{i''}=0$，因而

$$\omega^{i'}_{j''}=-\omega^{j''}_{i'}=\sum_k\left(c^{i'}_{j''k}-c^{j''}_{i'k}-c^{k}_{i'j''}\right)\omega^k$$
$$=\sum_{k'}\left(c^{i'}_{j''k'}-c^{j''}_{i'k'}-c^{k'}_{i'j''}\right)\omega^{k'}=0.$$

V_q 中的測地綫滿足

$$\frac{d\omega^{i'}\left(\dfrac{dx}{ds}\right)}{ds}+\omega^{j'}\left(\frac{dx}{ds}\right)\omega^{i'}_{j'}\left(\frac{dx}{ds}\right)=0, \qquad (6\cdot5\cdot8)$$

因为沿 V_q，$\omega^{i''}\left(\dfrac{dx}{ds}\right)=0$，所以沿此曲綫也成立

$$\begin{aligned}&\frac{d\omega^{i'}\left(\dfrac{dx}{ds}\right)}{ds}+\omega^{j}\left(\frac{dx}{ds}\right)\omega^{i'}_{j}\left(\frac{dx}{ds}\right)=0,\\&\frac{d\omega^{i''}\left(\dfrac{dx}{ds}\right)}{ds}+\omega^{j}\left(\frac{dx}{ds}\right)\omega^{i''}_{j}\left(\frac{dx}{ds}\right)=0,\end{aligned} \qquad (6\cdot5\cdot9)$$

所以它也是 V_n 中的測地綫，这样就証明了

定理 2 設 V_n 恰具有 q 个独立的不变向量場的齐性 Riemann 空間，則存在 ∞^{n-q} 的 q 維非素性的全測地曲面 V_q，它們以平面場 E_q 为自己的切平面素．

現設 H 在 E_{n-q} 中为实不可約的旋轉群，由引理可見，H 的变換旋轉群和空間 V_n 的构造有着密切的联系，下面分三种情况討論．

情形 1 H 无非平凡的可換旋轉群[2]．

---

[1] 依 V_n 的綫素，V_q 上的两邻近点的距离平方也为 q 个自变量的正定二次形式，因此 V_q 为 Riemann 空間，因而也有測地綫．

[2] 依 §4·6 可見，这时 H 为复不可約．

依据引理及 § 4·6 的討論就可見到,这时必須有

$$C^{k'}=0 \quad 而 \quad C_{m'}=C_{m'}E,$$

卽

$$c^{k'}_{l''m''}=0, \quad c^{i''}_{j''m'}=c_{m'}\delta^{i''}_{j''}. \tag{6·5·10}$$

因此

$$\begin{aligned} D\omega^{i'} &= \frac{1}{2}c^{i'}_{j'k'}[\omega^{j'}, \omega^{k'}], \\ D\omega^{i''} &= \frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}[\omega^{j''}, \omega^{k''}]+c_{k'}[\omega^{j''}, \omega^{k'}] \\ &\quad +c^{i''}_{j''\rho}[\omega^{j''}, \omega^{\rho}]. \end{aligned} \tag{6·5·11}$$

再細分如下的两种情形.

情形 1 a) 所有 $c_{k'}$ 均为 0. 这时由(6·5·10)式可見,$\omega^{i'}=0$ 及 $\omega^{i''}=0$ 分別为完全可积,設它們的初积分分別为 $x^{i'}$ 和 $x^{i''}$,則由 § 6·2 的引理可知

$$ds_1^2=\sum_{i'}(\omega^{i'})^2=g_{i'j'}(x^{k'})dx^{i'}dx^{j'}, \tag{6·5·12}$$

$$ds_2^2=\sum_{i''}(\omega^{i''})^2=g_{i''j''}(x^{k''})dx^{i''}dx^{j''} \tag{6·5·13}$$

各为只依賴于 $x^{i'}$ 及 $x^{i''}$ 的二次微分形式,因此空間的綫素为

$$ds^2=ds_1^2+ds_2^2, \tag{6·5·14}$$

V_n 是乘积空間. 由(6·5·9)的前一組式子可見,Riemann 空間 ds_1^2 容有以 $\omega^{i'}$ 为不变形式的单純可迁运动群 $G^{(1)}$, 由后一組式子可見 Riemann空間 ds_2^2 容有以 $\omega^{i''}$, ω^{ρ} 为不变形式的运动群 $G^{(2)}$. $G^{(2)}$ 作用在 $n-q$ 維空間,其迷向群卽为 H, 而群 G_r 分解为 $G^{(1)}$ 及 $G^{(2)}$ 的直积, $G_r=G^{(1)}\times G^{(2)}$, 其变換的有限方程为

$$\begin{aligned} \bar{x}^{i'} &= \varphi^{i'}(x^{j'}, c^{j'}), \\ \bar{x}^{i''} &= \varphi^{i''}(x^{j''}, c^{j''}, c^{\rho}). \end{aligned} \tag{6·5·15}$$

反过来也立即可以看出, 如已知一 q 維的李群及一迷向群无非平凡的交換旋轉的 $n-q$ 維齐性 Riemann 空間, 就能制作出属于这类型的齐性 Riemann 空間:

情形 1 b) $c_{i'}$ 不全为 0. 同样可見，$\omega^{i'}=0$ 及 $\omega^{i''}=0$ 分别为完全可积. (6·5·12) 式仍然有效，且以 ds_1^2 为綫素的齐性 Riemann 空間容許运动群 $G^{(1)}$. 我們重新写出(5·3·8)式为

$$c_{l\tau}^{k}c_{mh}^{\tau}+c_{m\tau}^{k}c_{hl}^{\tau}+c_{h\tau}^{k}c_{lm}^{\tau}=c_{lm}^{i}c_{ih}^{k}+c_{mh}^{i}c_{il}^{k}+c_{hl}^{i}c_{im}^{k}. \quad (6·5·16)$$

如在(6·5·16)式中令 $k=k''$, $h=h''$, $l=l'$, $m=m'$, 即得

$$c_{h''\tau}^{k''}c_{l'm'}^{\tau}=-\delta_{h''}^{k''}c_{i'}c_{l'm'}^{i'}.$$

置 k'' 为 h'' 并作和，利用 $c_{h''\tau}^{k''}$ 关于 k'', h'' 的反称性，就得到

$$c_{i'}c_{l'm'}^{i'}=0, \quad (6·5·17)$$

因此

$$D(c_{i'}\omega^{i'})=\frac{1}{2}c_{i'}c_{j'k'}^{i'}[\omega^{j'},\ \omega^{k'}]=0,$$

所以 $c_{i'}\omega^{i'}$ 为全微分，記它为 $\tilde{\omega}$, 則可选取函数 x^1 而有 $\tilde{\omega}=dx^1$. 从此已見到群 $G^{(1)}$ 有 $q-1$ 維的正常子群. 在运动群下由于

$$\tilde{\omega}(\bar{x},\ d\bar{x})=\tilde{\omega}(x,\ dx),$$

所以

$$\bar{x}^1=x^1+c^1. \quad (6·5·18)$$

再令

$$\omega^{i''}=e^{-x^1}\overline{\omega}^{i''}, \quad (6·5·19)$$

将它代入(6·5·11)式中，利用 $c_{i'}\omega^{i'}=dx^1$, 即得

$$D\overline{\omega}^{i''}=\frac{1}{2}c_{j''k''}^{i''}e^{-x^1}[\overline{\omega}^{j''},\ \overline{\omega}^{k''}]+c_{j''\rho}^{i''}[\overline{\omega}^{j''},\ \omega^{\rho}]. \quad (6·5·20)$$

又仍記 $\omega^{i''}=0$ 的一組独立的初积分为 $x^{s+1}, \cdots, x^n$ (它們也是 $\overline{\omega}^{i''}=0$ 的初积分)，由 § 6·2 的引理知

$$d\bar{s}_2^2=\sum_{i''}(\overline{\omega}^{i''})^2=a_{i''j''}(x^{k''})dx^{i''}dx^{j''}, \quad (6·5·21)$$

所以

$$\begin{aligned}ds^2&=ds_1^2+ds_2^2=ds_1^2+e^{-2x^1}d\bar{s}_2^2\\&=g_{i'j'}(x^{k'})dx^{i'}dx^{j'}+e^{-2x^1}a_{i''j''}(x^{k''})dx^{i''}dx^{j''} \quad (6·5·22)\end{aligned}$$

为半可約 Riemann 空間，因为在运动群作用下，

$$\omega^{i''}(\bar{x}, \bar{u}, d\bar{x}) = \omega^{i''}(x, u, dx),$$

所以

$$\bar{\omega}^{i''}(\bar{x}, \bar{u}, d\bar{x}) = e^{c^1}\bar{\omega}^{i''}(x, u, dx), \qquad (6\cdot5\cdot23)$$

故可見 Riemann 空間 $d\bar{s}_2^2$ 容有单参数非平凡相似群，当 $c^1=0$ 时我們还見到 ds_2^2 容有可迁的运动群

$$\bar{x}^{i''} = \varphi^{i''}(x^{j''}, 0, c^2, \cdots, c^r),$$

依 §6·5 的結果就見到，$d\bar{s}_2^2$ 必为欧氏空間的綫素，因此，在适当的坐标下，

$$ds^2 = g_{i'j'}(x^{k'})dx^{i'}dx^{j'} + e^{-2x^1}\{(dx^{q+1})^2 + \cdots + (dx^n)^2\}. \quad (6\cdot5\cdot24)$$

这时，空間的运动群可写成

$$\begin{aligned} &\bar{x}^1 = x^1 + c^1, \\ &\bar{x}^\rho = \varphi^\rho(x^{i'}, c^{i'}) \quad (\rho = 2, \cdots, q), \\ &\bar{x}^{i''} = e^{c^1}(a^{i''}_{j''}x^{j''} + c^{i''}), \end{aligned} \qquad (6\cdot5\cdot25)$$

其中 $(a^{i''}_{j''})$ 构成旋轉群 H.

反过来，容易見到，給了一个具有 $q-1$ 維正常子群的 q 維李群和 $n-q$ 維的旋轉群 H，就能制作出这种类型的齐性 Riemann 空間.

K. Yano 的結果是这里的討論的一个很特殊的情况，事实上，当 $n>3$ 时，又 $q=1$，H 在 E_{n-1} 上为全直交群(因此它沒有非平凡的交換旋轉)，情形 1 a) 的綫素 (6·5·14) 化为

$$ds^2 = (dx^1)^2 + ds_2^2, \qquad (6\cdot5\cdot26)$$

式中 ds_2^2 是以 $x^2, \cdots, x^n$ 为坐标的常曲率空間綫素. 情形 1 b) 中的綫素 (6·5·24) 即为

$$ds^2 = (dx^1)^2 + e^{-2x^1}((dx^2)^2 + \cdots + (dx^n)^2), \quad (6\cdot5\cdot27)$$

它本身也是負常曲率空間的綫素. 这便是 K. Yano 的結果. 这結果連同 §6·6 的結果也包含 M. Kurita 的研究作为特殊情形.

§ 6·6 迷向群具不变向量的齐性 Riemann 空間(續)

現轉入較为复杂的情形 2: H 的交換旋轉为单参数的,此时 H 为复可約, 实不可約的旋轉群, 但不为酉辛群或其子群的实形态[1].

由 § 4·6 的定理可知, 这时选取适当的基可使

$$c^{i'} = (c^{i'}_{j''k''}) = c^{i'} J, \tag{6·6·1}$$

$$c_{k'} = (c^{i''}_{j''k'}) = c_{k'} E + b_{k'} J, \tag{6·6·2}$$

于此 J 为方陣 $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, 又記

$$B_{k'} = (b^{i''}_{j''k'}) = b_{k'} J. \tag{6·6·3}$$

(6·5·1)式为

$$\left.\begin{aligned} D\omega^{i'} &= \frac{1}{2} c^{i'}_{j'k'} [\omega^{j'}, \omega^{k'}] + c^{i'} \sum_{I=q+1}^{q+m} [\omega^{I}, \omega^{I+m}], \\ D\omega^{i''} &= \frac{1}{2} c^{i''}_{j''k''} [\omega^{j''}, \omega^{k''}] + c_{i'} [\omega^{i''}, \omega^{i'}] \\ &\quad + b^{i''}_{j''l'} [\omega^{j''}, \omega^{l'}] + c^{i''}_{j''\rho} [\omega^{j''}, \omega^{\rho}]. \end{aligned}\right\} \tag{6·6·4}$$

再細分为下列情形討論.

情形 2 a)　如 $c^{i'} = 0$, $c_{i'} = 0$. 这时一切的討論几乎和情形 1 完全一样,所不同的只是可能发生 $b_{k'} \neq 0$,但利用 $b^{i''}_{j''k'}$ 关于 i'', j'' 的反称性仍然得出空間綫素的可分性:

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2, \tag{6·6·5}$$

但此时群 G_r 不一定分解为直积, G_r 也未必为完全运动群.

情形 2 b)　設 $c^{i'} = 0$, 但 $c_{i'}$ 不全为 0.

在(6·5·16)式中令 $k = k''$, $h = h''$, $l = l'$, $m = m'$, 即得

$$c^{k''}_{h''\tau} c^{\tau}_{l'm'} = c^{i'}_{l'm'} c^{k''}_{i'h''} = -\delta^{k''}_{h''} c_{i'} c^{i'}_{l'm'} - b^{k''}_{h''i'} c^{i'}_{l'm'}.$$

置 k'' 为 h'', 并作和, 得

$$c_{i'} c^{i'}_{l'm'} = 0. \tag{6·6·6}$$

---

[1] 严格地説来,应为不相似于酉辛群或其子群的实形态.

如同情形 1 b)一样,知 $c_{i'}\omega^{i'}$ 为全微分选它为 ω^1, 选 x^1 使

$$\omega^1=dx^1, \tag{6·6·7}$$

我們可同样地得出空間綫素:

$$ds^2=g_{i'j'}(x^{k'})dx^{i'}dx^{j'}+e^{-2x^1}\{(dx^{q+1})^2+\cdots+(dx^n)^2\}. \tag{6·6·8}$$

空間必容許形状为

$$\begin{aligned}\bar{x}^1&=x^1+c^1,\\ \bar{x}^p&=\varphi^p(x^{j'},\ c^{j'}),\\ \bar{x}^{i''}&=e^{c^1}(a^{i''}_{j''}x^{j''}+c^{i''})\end{aligned} \tag{6·6·9}$$

的运动群.

情形 2 c) 設所有 $c_{i'}=0$, 但 $c^{i'}$ 不全为 0.

設 $(A^{i'}_{j'})$ 为直交陣(元素为常数),且滿足 $A^{i'}_{j'}c^{j'}=c\delta^{i'}_1$,作变換 $\overline{\omega}^{i'}=A^{i'}_{j'}\omega^{j'}$[1], 仍記 $\overline{\omega}^{i'}$ 为 $\omega^{i'}$, 則(6·6·4)式可改写为

$$\begin{aligned}D\omega^1&=\frac{1}{2}c^1_{j'k'}[\omega^{j'},\ \omega^{k'}]+c\sum_I[\omega^I,\ \omega^{I+m}],\\ D\omega^p&=\frac{1}{2}c^p_{j'k'}[\omega^{j'},\ \omega^{k'}]\quad(p=2,\ \cdots,\ q),\\ D\omega^{i''}&=\frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}[\omega^{j''},\ \omega^{k''}]+b^{i''}_{j''m'}[\omega^{j''},\ \omega^{m'}]\\ &\quad+c^{i''}_{j''\rho}[\omega^{j''},\ \omega^{\rho}],\end{aligned} \tag{6·6·10}$$

$\omega^{i''}=0$ 仍为完全可积. 由于 $b^{i''}_{j''m'}$, $c^{i''}_{j''\rho}$ 关于 i'', j'' 的反称性,

$$ds_2^2=\sum(\omega^{i''})^2 \tag{6·6·11}$$

为一 Riemann 綫素, 它的迷向群是由 $(c^{i''}_{j''\rho})$, $(b^{i''}_{j''m'})$ 所生成的. 此外, $(c^1_{i''j''})=cJ$ 与 $(c^{i''}_{j''\rho})$, $(b^{i''}_{j''m'})=b_{m'}J$ 可交換,所以 $(c^1_{i''j''})$ 为 ds_2^2 的迷向群下的不变張量,因此由 § 6·2 的引理的注可知

$$\Omega=c\sum_I[\omega^I,\ \omega^{I+m}] \tag{6·6·12}$$

仅和完全可积的 Pfaff 方程組 $\omega^{i''}=0$ 的独立积分系 $x^{i''}$ 及其微分有关. 不但如此,我們还可証明

[1] 这相当于适当地选取可容許标形族的基.

$$D\Omega=0, \tag{6·6·13}$$

为此，在 (6·5·16) 式中置 $k=k'$, $l=l''$, $m=m'$, $h=h''$, 我們有

$$c^{k'}_{i''h''}b^{i''}_{l''m'}-b^{i''}_{h''m'}c^{k'}_{i''l''}+c^{1}_{h''l''}c^{k'}_{1m'}=0.$$

对固定的 m' 和 k', $b^{i''}_{l''m'}$ 和 $c^{k'}_{i''l''}$ 成比例，所以这式子的前面两项消去，因此就得到

$$c^{1}_{h''l''}c^{k'}_{1m'}=0.$$

因 $c^{1}_{h''l''}$ 不全为 0, 故得

$$c^{k'}_{1m'}=0. \tag{6·6·14}$$

将(6·6·10)的第一式两边外微分一次，就得到

$$D\left\{\frac{1}{2}c^{1}_{j'k'}[\omega^{j'},\omega^{k'}]\right\}=-D\Omega. \tag{6·6·15}$$

但是考虑到 $c^{k'}_{1m'}=0$,

$$D\left\{\frac{1}{2}c^{1}_{j'k'}[\omega^{j'},\omega^{k'}]\right\}=\frac{1}{2}c^{1}_{ps}c^{p}_{tu}[\omega^{u},\omega^{s},\omega^{t}]$$
$$(p,\ s,\ t,\ u=2,\ \cdots,\ q).$$

(6·6·15) 的左边是 $\omega^p=0$ 的独立初积分 x^p 的三次外微分形式，而 $D\Omega$ 却是变量 $x^{i''}$ 的外形式，所以只好两边为 0, 这就証明了(6·6·13)式，因此存在 Pfaff 式 ω, 使 $\Omega=D\omega$. 又因 $(c^{1}_{i''j''})$ 的秩为 $n-q$, 依 § 2·5 定理的推論知道，必可选到 $n-q$ 个独立变量 $x^{i''}$, 使 $\Omega=D\omega$, 且

$$\omega=\sum_I(x^I dx^{I+m}-x^{I+m}dx^I).$$

因此还可写 ω^1 为

$$\omega^1=dx^1+\theta(x^s,\ dx^s)+\frac{1}{2}\sum_I(x^I dx^{I+m}-x^{I+m}dx^I). \tag{6·6·16}$$

如令

$$\tilde{\omega}^1=dx^1+\theta(x^s,\ dx^s), \tag{6·6·17}$$

则由(6·6·10)和(6·6·14)可知，

$$D\widetilde{\omega}^1=\frac{1}{2}c^1_{st}[\omega^s,\ \omega^t],$$
$$D\omega^p=\frac{1}{2}c^p_{st}[\omega^s,\ \omega^t].\tag{6·6·18}$$

因此，$\omega^2,\ \cdots,\ \omega^q$ 是一个 $q-1$ 維李群的独立不变形式組，此外，$\widetilde{\omega}^1,\ \omega^2,\ \cdots,\ \omega^q$ 也构成一个群 $G^{(1)}$ 的不变形式組，群 $G^{(1)}$ 并有一个由 $\omega^p=0$ 所定义的单参数正常子群，又因 $c^{k'}_{1t'}=0$，知道 $G^{(1)}$ 所对应的李代数基 $X_{t'}$ 之間存在着关系

$$[X_1,\ X_{t'}]=0,$$

所以这一单参数子群 $\omega^p=0$ 属于群 $G^{(1)}$ 的中核，因此群 $G^{(1)}$ 的中核至少为一維的，这时空間 V_n 的綫素可写为

$$ds^2=\{dx^1+\theta(x^p,\ dx^p)+\frac{1}{2}\sum_I(x^Idx^{I+m}-x^{I+m}dx^I)\}^2$$
$$+d\bar{s}_1^2+ds_2^2,\tag{6·6·19}$$

式中

$$d\bar{s}_1^2=\sum_p(\omega^p)^2=g_{st}(x^p)dx^sdx^t\tag{6·6·20}$$

是以 ω^p 为独立不变形式系的李群作为单純可迁运动群的 $q-1$ 維 Riemann 空間，而 ds_2^2 的性质前面已經叙述过了.

为了找出运动群的有限方程，由于 $(c^1_{j^pk^p})$ 为 ds_2^2 的迷向群下的不变張量，仿照 § 6·2 定理 1 的証明，可知 ds_2^2 的运动群

$$\bar{x}^{i''}=\varphi^{i''}(x^{i''},\ c^{i''},\ c^{i'},\ c^p)\tag{6·6·21}$$

会使外形式 Ω 保持不变，故有

$$D\left\{\frac{1}{2}\sum_I(\bar{x}^Id\bar{x}^{I+m}-\bar{x}^{I+m}d\bar{x}^I)\right\}$$
$$=D\left\{\frac{1}{2}\sum_I(x^Idx^{I+m}-x^{I+m}dx^I)\right\}.$$

利用 Poincaré 定理的逆定理可知：存在函数 $\psi(x^{i''},c^{i''},c^{i'},c^p)$，使得

$$-\frac{1}{2}\sum_{l}(\bar{x}^l d\bar{x}^{l+m}-\bar{x}^{l+m}d\bar{x}^l)+\frac{1}{2}\sum_{l}(x^l dx^{l+m}-x^{l+m}dx^l)$$

$$=d\psi(x^{j''},\ c^{j''},\ c^{j'},\ c^{\rho}). \qquad (6\cdot6\cdot22)$$

因为 V_n 的运动群滿足

$$\omega^i(\bar{x},\ \bar{u},\ d\bar{x})=\omega^i(x,\ u,\ dx),$$

所以 G_r 的方程必具形状

$$\begin{aligned}&\bar{x}^1=x^1+c^1+\varphi^1(x^p,\ c^p)+\psi(x^{j''},\ c^{j''},\ c^{j'},\ c^{\rho}),\\&\bar{x}^p=\varphi^p(x^s,\ c^s),\\&\bar{x}^{i''}=\varphi^{i''}(x^{j''},\ c^{j''},\ c^{j'},\ c^{\rho}),\end{aligned} \qquad (6\cdot6\cdot23)$$

而群 $G^{(1)}$ 的有限方程为

$$\begin{aligned}&\bar{x}^1=x^1+c^1+\varphi^1(x^p,\ c^p),\\&\bar{x}^p=\varphi^p(x^s,\ c^s).\end{aligned} \qquad (6\cdot6\cdot24)$$

前面我們已經看到，非素性曲面 V_q[1] 为全測地曲面，由(6·6·4) 可进一步知道 $G^{(1)}$ 为 V_q 的运动群．如同証明 V_q 为全測地曲面一样，可証得曲綫 $\omega^p=0,\ \omega^{i''}=0$（即 x^1 曲綫）为运动群的非素性集，且为測地綫，又从群的有限方程中可看到，x^1 曲綫同时也是运动群的道路．此外，由于 $\omega^{i'}=0$ 不完全可积，所以平面場 E_{n-q} 是非和乐的．

反过来，如給了一个中核至少为 1 維的 q 維李群 $G^{(1)}$，以及一个 $n-q$ 維齐性 Riemann 空間 V_{n-q}，它的迷向群为复可約，实不可約，就可制作出这一类型的齐性 Riemann 空間，这是因为，在所設的条件下，$G^{(1)}$ 的 Maurer-Cartan 方程可取为(6·6·18)的形状．由此可見，$D\tilde{\omega}^1$ 是 $\omega^p=0$ 的初积分 x^p 的二次外微分形式，因而可記 $\tilde{\omega}^1$ 为

$$\tilde{\omega}^1=dx^1+\omega(x^s,\ dx^s).$$

又由 V_{n-q} 的性质可知，存在 Pfaff 式 $\bar{\omega}^{i''},\ \bar{\omega}^{\rho}$，使

---

[1] V_q 的方程为 $x^{i''}$=常数．

$$D\overline{\omega}^{i''}=\frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}[\overline{\omega}^{j''},\ \overline{\omega}^{k''}]+c^{i''}_{j''\rho}[\overline{\omega}^{j''},\ \overline{\omega}^{\rho}],$$

且存在$(b^{i''}_{j''m'})=b_{m'}J$，与$(c^{i''}_{j''\rho})$可交换．因此，若令

$$\omega^1=\widetilde{\omega}^1+\frac{1}{2}\sum_{l}(x^l dx^{l+m}-x^{l+m}dx^l)$$

($x^{i''}$ 为 $\overline{\omega}^{i''}=0$ 的适当的初积分)，那末就成立 (6·6·10)式．这样，就能确定出这一类型的齐性 Riemann 空間．

下面的三維齐性 Riemann 空間就是一个例子：

$$ds^2=\left[dz+\frac{xdy-ydx}{1+\frac{K}{4}(x^2+y^2)}\right]^2$$

$$+\frac{dx^2+dy^2}{\left\{1+\frac{K}{4}(x^2+y^2)\right\}^2}\quad (K=\text{const}),\qquad (6\cdot6\cdot25)$$

式中的第二項为常曲率綫素，选取适当坐标后第一項中的 $\dfrac{xdy-ydx}{1+\frac{K}{4}(x^2+y^2)}$ 可化为 $xdy-ydx$ 的形式，这便是綫素(6·6·19)的特殊情形，綫素(6·6·25)的导来可見 § 6·9．

情形 2 d)　$c^{i'}$, $c_{i'}$ 均不全为零．

和前面一样，可以选取适当的 ω^i，使

$$D\omega^1=\frac{1}{2}c^1_{j'k'}[\omega^{j'},\ \omega^{k'}]+c\sum_{l}[\omega^l,\ \omega^{l+m}],$$

$$D\omega^{\rho}=\frac{1}{2}c^{\rho}_{j'k'}[\omega^{j'},\ \omega^{k'}],\qquad (6\cdot6\cdot26)$$

$$D\omega^{i''}=\frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}[\omega^{j''},\ \omega^{k''}]+c_{i'}[\omega^{i''},\ \omega^{i'}]$$

$$+b^{i''}_{j''m'}[\omega^{j''},\ \omega^{m'}]+c^{i''}_{j''\rho}[\omega^{j''},\ \omega^{\rho}].$$

在 (6·5·16) 式中令 $k=1$, $m=m'$, $l=l''$, $h=h''$，我們得到

$$2c^1_{l''h''}c_{m'}+c^1_{h''l''}c^1_{1m'}=0,$$

即

$$c^1_{1m'}=2c_{m'},\tag{6·6·27}$$

特別有

$$c_1=0.\tag{6·6·28}$$

再在(6·5·16)式中令 $k=p$, $m=m'$, $l=l''$, $h=h''$, 卽得

$$c^p_{1m'}=0.\tag{6·6·29}$$

又在 (6·5·16) 式中令 $k=1$, $m=t$, $l=s$, $h=1$, 利用 $c_1=0$ 后卽得

$$c_pc^p_{st}=0,\tag{6·6·30}$$

因而 $D(c_p\omega^p)=0$. 如記

$$c_p\omega^p=df(x^2,\ \cdots,\ x^q),$$

此处 x^p 为 $\omega^p=0$ 的独立初积分系,则可改写(6·6·26)为

$$\begin{aligned}
D\omega^1&=2[\omega^1,\ df]+\frac{1}{2}c^1_{st}[\omega^s,\ \omega^t]+c\sum_l[\omega^l,\ \omega^{l+m}],\\
D\omega^p&=\frac{1}{2}c^p_{st}[\omega^s,\ \omega^t],\\
D\omega^{i''}&=\frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}[\omega^{j''},\ \omega^{k''}]+[\omega^{i''},\ df]+b^{i''}_{j''m'}[\omega^{j''},\ \omega^{m'}]\\
&\quad+c^{i''}_{j''p}[\omega^{j''},\ \omega^p];
\end{aligned}\tag{6·6·31}$$

置

$$\omega^{i''}=e^{-f}\bar{\omega}^{i''}.\tag{6·6·32}$$

如同情形 1 b)一样,可知

$$\sum_{i''}(\omega^{i''})^2=e^{-2f}\sum(\bar{\omega}^{i''})^2=e^{-2f}d\bar{s}^2_2,\tag{6·6·33}$$

式中 $d\bar{s}^2_2$ 为欧氏綫素,其运动群由方程 $\bar{\omega}^{i''}(\bar{x}^{j''},\bar{x}^p,d\bar{x}^{j''})=\bar{\omega}^{i''}(x^{j''},x^p,dx^{j''})$ 定义. 选取 $x^{i''}$ 为笛卡儿坐标,并参照 §6·2 的两个注,可見

$$\bar{\omega}^{i''}=a^{i''}_{j''}dx^{j''},\tag{6·6·34}$$

并且 $(a^{i''}_{j''})$ 为迷向群的一般元素. 注意到迷向群和方陣 J 可交换,又对 $x^{i''}$ 添上适当倍数就得出

$$c\sum_I[\overline{\omega}^I,\ \omega^{I+m}]=\sum_I[dx^I,\ dx^{I+m}].\qquad(6\cdot6\cdot35)$$

因此得

$$\Omega=c\sum_I[\omega^I,\ \omega^{I+m}]=e^{-2f}\sum_I[dx^I,\ dx^{I+m}].\qquad(6\cdot6\cdot36)$$

如置

$$\omega^1=e^{-2f}\overline{\omega}^1,\qquad(6\cdot6\cdot37)$$

則

$$D\overline{\omega}^1=\frac{1}{2}\,e^{2f}c^1_{st}[\omega^s,\ \omega^t]+\sum_I[dx^I,\ dx^{I+m}].$$

两边外微分一次后可知

$$D\left\{\frac{1}{2}\,e^{2f}c^1_{st}[\omega^s,\omega^t]\right\}=0,$$

所以存在 Pfaff 式 $\omega(x^s,\ dx^s)$，使

$$\omega^1=e^{-2f}\left\{dx^1+\omega(x^s,\ dx^s)+\frac{1}{2}\sum_I(x^Idx^{I+m}-x^{I+m}dx^I)\right\}.\qquad(6\cdot6\cdot38)$$

如再令

$$\widetilde{\omega}^1=e^{-2f}\{dx^1+\omega(x^s,\ dx^s)\},\qquad(6\cdot6\cdot39)$$

那末

$$\begin{aligned}D\widetilde{\omega}^1&=2[\widetilde{\omega}^1,\ df]+\frac{1}{2}\,c^1_{ps}[\omega^p,\ \omega^s],\\ D\omega^p&=\frac{1}{2}\,c^p_{st}[\omega^s,\ \omega^t].\end{aligned}\qquad(6\cdot6\cdot40)$$

可見 $\widetilde{\omega}^1,\omega^p$ 构成一个 q 維李群 $G^{(1)}$ 的全系不变式，且由 $D(c_p\omega^p)=0$ 知道它含有一个 $q-1$ 維正常子群（方程为 $df=c_p\omega^p=0$），而这个正常子群又有单参数子群 $\omega^p=0$ 属于它的中核，因而这个正常子群的中核至少是一維的。

經过空間的坐标变换，不妨使 f 为 x^2，空間的綫素可写为

$$ds^2=e^{-4x^2}\{dx^1+\omega(x^s,dx^s)+\frac{1}{2}\sum_I(x^Idx^{I+m}-x^{I+m}dx^I)\}^2$$
$$+ds_1'^2+e^{-2x^2}\{(dx^{q+1})^2+\cdots+(dx^n)^2\},\qquad(6\cdot6\cdot41)$$

此处

$$ds_1'^2=(\omega^2)^2+\cdots+(\omega^q)^2=g_{st}(x^p)\,dx^s\,dx^t \qquad (6\cdot6\cdot42)$$

为一个容許单純可迁运动群的 $q-1$ 維 Riemann 空間的綫素，此群即由不变式系 ω^p 所确定.

为了写出运动群的有限方程，同情形 2 c)一样，从方程

$$\omega^i(\bar{x},\ \bar{u},\ d\bar{x})=\omega^i(x,\ u,\ dx)$$

知道运动群的方程的形状为

$$\begin{aligned}
&\bar{x}^1=e^{2c^2}x^1+\varphi(x^p,\ c^p)+c^1+\psi(x^{i''},\ c^{i''},\ c^{i'},\ c^p),\\
&\bar{x}^2=x^2+c^2,\\
&\bar{x}^{p'}=\varphi^{p'}(x^p,\ c^p) \qquad (p'=3,\ \cdots,\ q), \qquad\qquad (6\cdot6\cdot43)\\
&\bar{x}^{i''}=e^{c^2}(a^{i''}_{j''}x^{j''}+c^{i''}),
\end{aligned}$$

此处函数 $\psi(x^{i''},\ c^{i''},\ c^{i'},\ c^p)$ 满足

$$\begin{aligned}
d\psi=e^{2c^2}&\sum_I(x^I dx^{I+m}-x^{I+m}dx^I)\\
&-\sum_I(\bar{x}^I d\bar{x}^{I+m}-\bar{x}^{I+m}d\bar{x}^I), \qquad (6\cdot6\cdot44)
\end{aligned}$$

而其中 $(a^{i''}_{j''})$ 是 H 与它的变换旋轉群或其子群的直积，而

$$\begin{aligned}
&\bar{x}^1=e^{2c^2}x^1+\varphi(x^p,\ c^p)+c^1,\\
&\bar{x}^2=x^2+c^2, \qquad\qquad (6\cdot6\cdot45)\\
&\bar{x}^{p'}=\varphi^{p'}(x^p,\ c^p) \qquad (p'=3,\ \cdots,\ q)
\end{aligned}$$

是 $G^{(1)}$ 的有限方程，此时

$$\bar{x}^2=x^2$$

为 $G^{(1)}$ 的正常子群，而

$$\bar{x}^2=x^2, \quad \bar{x}^{p'}=x^{p'}$$

是这个正常子群中的一个单参数群，它属于中核.

同样可以看到 $G^{(1)}$ 为这些 V_q 的运动群，而曲綫 $\omega^{i''}=0$，$\omega^p=0$(即 x^1 曲綫)是非素性集，且为运动群的道路.

反过来，如已給了一个 $q(>1)$ 維李群，它具有中核不低于一維的一个 $q-1$ 維正常子群，則可以选取第二类不变形式，使

得

$$c_p\omega^p = df,$$

$$D\tilde{\omega}^1 = 2[\tilde{\omega}^1,\ df] + \frac{1}{2}c^1_{ps}[\omega^p,\ \omega^s], \qquad (6\cdot6\cdot46)$$

$$D\omega^p = \frac{1}{2}c^p_{st}[\omega^s,\ \omega^t],$$

所以就能制作出这一类型的齐性 Riemann 空間.

我們考察綫素为

$$ds^2 = \{dx^1 + x^3dx^2 + x^2dx^3 + \frac{1}{2}(x^4dx^5 - x^5dx^4)\}^2 e^{-4(x^2+x^3)}$$
$$+ (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + e^{-2(x^2+x^3)}[(dx^4)^2 + (dx^5)^2] \qquad (6\cdot6\cdot47)$$

的 V_5 作为例子,不難驗証,它容有运动群

$$\begin{aligned}
&\bar{x}^2 = x^2 + c^2, \quad \bar{x}^3 = x^3 + c^3,\\
&\bar{x}^4 = e^{(c^2+c^3)}(\alpha x^4 - \beta x^5) + c^4,\\
&\bar{x}^5 = e^{(c^2+c^3)}(\beta x^4 + \alpha x^5) + c^5,\\
&\bar{x}^1 = e^{2(c^2+c^3)}x^1 + (-1 + e^{2c^2+2c^3})x^2x^3 - c^3x^2 - c^2x^3\\
&\qquad - \frac{1}{2}\{(c^4\beta - c^5\alpha)x^4 + (c^4\alpha + c^5\beta)x^5\} + c^1,
\end{aligned} \qquad (6\cdot6\cdot48)$$

此处 $\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$ 为直交陣,而群 $G^{(1)}$ 为

$$\begin{aligned}
&\bar{x}^1 = e^{2(c^2+c^3)}x^1 + (-1 + e^{2(c^2+c^3)})x^2x^3 + c^1 - c^3x^2 - c^2x^3,\\
&\bar{x}^2 = x^2 + c^2,\\
&\bar{x}^3 = x^3 + c^3.
\end{aligned} \qquad (6\cdot6\cdot49)$$

此时 V_5 的迷向群有 3 个独立不变向量 (1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), 而在 E_{n-q}(即 E_2)平面上的迷向群为一維旋轉群.

§ 6·7　迷向群具不变向量的齐性 Riemann 空間(再續)

我們再考察更为复杂的情形.

情形 3 H 的交换旋轉为三参数的，卽 H 为复可約，实不可約，相似于西辛群或其子群的实形态.

把(4·6·4)記为

$$I_1=J, \quad I_2=\begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3=\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}. \tag{6·7·1}$$

这时成立 $I_1I_2=I_3$, $I_2I_3=I_1$, $I_3I_1=I_2$. 依前节的引理知

$$C^{i'}=(c^{i'}_{j''k''})=c^{i'}_1I_1+c^{i'}_2I_2+c^{i'}_3I_3, \tag{6·7·2}$$

$$C_{m'}=(c^{i''}_{j''m'})=c_{m'}E+l^p_{m'}I_p \quad (p=1,\ 2,\ 3), \tag{6·7·3}$$

又記

$$B_{m'}=(b^{i''}_{j''m'})=l^p_{m'}I_p. \tag{6·7·4}$$

如再用 Ω^p 来記对应于 I_p 的二次外微分形式，則有

$$D\omega^{i'}=\frac{1}{2}c^{i'}_{j'k'}[\omega^{j'},\ \omega^{k'}]+c^{i'}_p\Omega^p \quad (p=1,\ 2,\ 3),$$

$$\begin{aligned} D\omega^{i''}=&\frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}[\omega^{j''},\ \omega^{k''}]+c_{m'}[\omega^{i''},\ \omega^{m'}] \\ &+b^{i''}_{j''m'}[\omega^{j''},\ \omega^{m'}]+c^{i''}_{j''\rho}[\omega^{j''},\ \omega^{\rho}]. \end{aligned} \tag{6·7·5}$$

这时可分下列四种情况:

情形 3 a): 所有 $c^{i'}_p=0$;

情形 3 b): 所有 $c^{i'}_p\Omega^p$ 成比例;

情形 3 c): 所有 $c^{i'}_p\Omega^p$ 中有两个独立;

情形 3 d): 所有 $c^{i'}_p\Omega^p$ 中有三个独立.

下面分别对各种情形进行考察.

情形 3 a) 所有 $c^{i'}_p=0$. 这时的討論基本上和情形 1 相同，可得到可分或半可分的綫素.

情形 3 b) 所有 $c^{i'}_p\Omega^p$ 成比例.

在(6·5·16)式中令 $k=k'$, $m=m'$, $l=l''$, $h=h''$, 卽得

$$2c^{k'}_{l''h''}c_{m'}+b^{l''}_{l''m'}c^{k'}_{l''h''}-b^{l''}_{h''m'}c^{k'}_{l''l''}+c^{1}_{h''l''}c^{k'}_{1m'}=0. \tag{6·7·6}$$

置 $k'=2,\ \cdots,\ q$, 則有

$$c^s_{1m'}=0 \quad (s=2, \cdots, q). \tag{6·7·7}$$

又在(6·7·6)中置 $k'=1$, 成立

$$2c_{m'}c^1_{i''h''}+b^{l''}_{i''m'}c^1_{l''h''}-b^{l''}_{h''m'}c^1_{i''l''}+c^1_{h''i''}c^1_{1m'}=0. \tag{6·7·8}$$

由于与 H' 可交換的矩陣在适当基下总可化为 λJ 型，故不妨設

$$(c^1_{i''h''})=\lambda I_1, \tag{6·7·9}$$

于是可改写上述方程为矩陣形式

$$2c_{m'}I_1+b^{\rho}_{m'}(I_\rho I_1-I_1I_\rho)-c^1_{1m'}I_1=0. \tag{6·7·10}$$

由 I_ρ 之間的乘法規律可知左边 I_1 的系数为 $2c_{m'}-c^1_{1m'}$, 所以

$$2c_{m'}-c^1_{1m'}=0, \tag{6·7·11}$$

(6·7·7), (6·7·11)和(6·6·29), (6·6·27)完全相同，因此，可以和情形 2 相似地进行討論，其結果也和情形 2 相同.

情形 3 c) 所有 $c^{i'}_{p}\Omega^p$ 中有两个独立的，由于这情形的討論可作为下面的情形 3 d) 的类似来处理，我們不詳細写出它的过程，只是在討論了情形 3 d) 后再来指出应有的結果.

情形 3 d) 所有 $c^{i'}_{p}\Omega^p$ 中有三个独立.

因为初始标形的基作变換时，$\omega^{i'}$ 和 $c^{i'}_{p}\Omega^p$ 也受到相应的綫性变換，把 $c^{i'}_{p}$ 視为由 $e_1, \cdots, e_q$ 所成的子空間上的向量坐标，那末这些向量是在一个 3 維平面上，可选取基，使 e_1, e_2, e_3 在这 3 維平面上 (未必为直交)，$e_4, \cdots, e_q$ 在它的直交补上，$e_4, \cdots, e_q$ 为单位向量，相互直交，于是 Cartan-Maurer 方程化为

$$\begin{aligned}
D\omega^p&=\frac{1}{2}c^p_{j'k'}[\omega^{j'}, \omega^{k'}]+\Omega^p \quad (p, s, t=1, 2, 3),\\
D\omega^a&=\frac{1}{2}c^a_{j'k'}[\omega^{j'}, \omega^{k'}] \quad (a, b, c=4, \cdots, q), \qquad (6·7·12)\\
D\omega^{i''}&=\frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}[\omega^{j''}, \omega^{k''}]+c_{m'}[\omega^{i''}, \omega^{m'}]\\
&\quad+b^{i''}_{j''m'}[\omega^{j''}, \omega^{m'}]+c^{i''}_{j''\rho}[\omega^{j''}, \omega^{\rho}].
\end{aligned}$$

如果 $e_s\cdot e_t=g_{st}$, 那末空間的綫素就是

$$ds^2 = g_{st}\omega^s\omega^t + (\omega^4)^2 + \cdots + (\omega^n)^2, \qquad (6\cdot7\cdot13)$$

于此(g_{st})为正定对称矩陣,元素为常数.

在(6·5·16)式中令 $k=s$, $l=l''$, $m=m'$, $h=h''$, 我們得到

$$b^{l''}_{l''m'}c^s_{l''h''} - b^{l''}_{h''m'}c^s_{l''l''} = c^t_{l''h''}(c^s_{tm'} - 2\delta^s_t c_{m'}), \qquad (6\cdot7\cdot14)$$

改写成矩陣形式,得

$$-l^p_{m'}I_pI_s + l^p_{m'}I_sI_p = \sum_t I_t(c^s_{tm'} - 2\delta^s_t c_{m'}). \qquad (6\cdot7\cdot14')$$

再細分为两种情形来討論.

情形 3 d$_{\text{I}}$) 所有的 $c_{m'}=0$.

在(6·7·14′)式的右边实际上不包含 I_s, 所以得

$$c^s_{tm'} = 0 \quad (s=t).$$

再在(6·7·14)中令 $s=1$, 利用 $I_3I_1=I_2$ 就得

$$c^1_{2m'} = -2l^3_{m'};$$

同理有

$$c^2_{1m'} = 2l^3_{m'}.$$

所以

$$c^2_{1m'} + c^1_{2m'} = 0.$$

这样一般地可以得到

$$c^s_{tm'} + c^t_{sm'} = 0. \qquad (6\cdot7\cdot15)$$

又在(6·5·16)式中令 $k=a$, $l=l''$, $m=m'$, $h=h''$, 得

$$c^a_{pm'}c^p_{h''l''} = 0.$$

因为$(c^p_{h''l''})$ $(p=1, 2, 3)$为独立的,故有

$$c^a_{pm'} = 0, \qquad (6\cdot7\cdot16)$$

因而

$$D\omega^p = \frac{1}{2}c^p_{st}[\omega^s, \omega^t] + c^p_{sa}[\omega^s, \omega^a] + \frac{1}{2}c^p_{ab}[\omega^a, \omega^b] + \Omega^p, \qquad (6\cdot7\cdot17)$$

$$D\omega^a = \frac{1}{2}c^a_{bc}[\omega^b, \omega^c].$$

为确定 B_p, 在(6·5·16)式中令 $k=p$, $l=l''$, $m=p$, $h=h''$, 再利用 $c^p_{lp}=0$(p 不作和)后即可得到

$$b^{i''}_{l''p}c^{p}_{i''h''}-b^{i''}_{h''p}c^{p}_{i''l''}=0 \qquad (p\text{ 不作和}),$$

即

$$[B_p,\ I_p]=0.$$

設 $B_1=a_1I_1+b_1I_2+c_1I_3$, 則由

$$[B_1,\ I_1]=b_1[I_2,\ I_1]+c_1[I_3,\ I_1]=-2b_1,\ I_3+2c_1I_2=0,$$

所以 $b_1=c_1=0$, 因此 $B_1=a_1I_1$. 一般成立

$$B_p=a_pI_p \quad (p\text{ 固定,不作和}). \tag{6·7·18}$$

再在(6·5·16)式中令 $k=p$, $l=l''$, $m=q$, $h=h''$, 得

$$c^{i''}_{l''q}c^{p}_{i''h''}+c^{i''}_{qh''}c^{p}_{i''l''}+c^{s}_{h''l''}c^{p}_{sq}=0,$$

此即

$$2a_qI_pI_q=\sum_s c^p_{sq}I_s. \tag{6·7·18'}$$

利用 I_1, I_2, I_3 的乘法关系,从此就得到

$$\left.\begin{aligned}&a_1=a_2=a_3=-\frac{1}{2}c^1_{23},\\&c^1_{12}=c^1_{13}=c^2_{21}=c^2_{23}=c^3_{31}=c^3_{32}=0,\end{aligned}\right\} \tag{6·7·18''}$$

所以不妨写

$$B_p=aI_p, \tag{6·7·19}$$

再分二种情形討論.

(i) $a\neq 0$.

这时 $b^{i''}_{j''b}=\dfrac{l^p_b}{a}b^{i''}_{j''p}$, 如改記 $\omega^p+\dfrac{l^p_b}{a}\omega^b$ 为 ω^p, 則可导出

$$b^{i''}_{j''b}=0. \tag{6·7·20}$$

如在(6·5·16)式中令 $k=k''$, $l=l'$, $m=m'$, $h=h''$, 即得

$$c^{k''}_{h''\tau}c^{\tau}_{l'm'}=-c^{i'}_{l'm'}b^{k''}_{h''i'}+(b^{i''}_{h''l'}b^{k''}_{i''m'}-b^{i''}_{h''m'}b^{k''}_{i''l'}).$$

因为 I_p 和 $I_q(q\neq p)$不相交换,所以 I_p 不属于 H 的綫性李代数,因而 I_p 不能用$(c^{i''}_{j''\rho})$綫性表出,所以有

$$c^{\tau}_{l'm'}=0. \tag{6·7·21}$$

再对 $D\omega^{i''}=\frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}[\omega^{j''},\ \omega^{k''}]+b^{i''}_{j''p}[\omega^{j''},\ \omega^{p}]+c^{i''}_{j''\rho}[\omega^{j''},\ \omega^{\rho}]$ 外微分一次，并利用(6·7·21)，立即見到

$$c^{p}_{sa}=0,\quad c^{p}_{ab}=0,$$

所以我們有

$$\left.\begin{aligned}D\omega^{p}&=\frac{1}{2}c^{p}_{st}[\omega^{s},\ \omega^{t}]+\Omega^{p},\\ D\omega^{a}&=\frac{1}{2}c^{a}_{bc}[\omega^{b},\ \omega^{c}],\\ D\omega^{i''}&=\frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}[\omega^{j''},\ \omega^{k''}]+b^{i''}_{j''p}[\omega^{j''},\ \omega^{p}]\\ &\quad+c^{i''}_{j''\rho}[\omega^{j''},\ \omega^{\rho}].\end{aligned}\right\} \tag{6·7·22}$$

可見空間的綫素为

$$ds^{2}=g_{i'j'}\omega^{i'}\omega^{j'}+\sum(\omega^{i''})^{2}, \tag{6·7·23}$$

式中 $g_{i'j'}$ 为常数，且构成一个 q 阶的正定对称陣，$ds_1^2=\sum(\omega^{i''})^2$ 为一个 $n-q$ 維的齐性 Riemann 空間，它的迷向群为 V_n 的迷向群与其交換旋轉群的直积．相反地，如果給了这样的 $n-q$ 維的齐性 Riemann 空間，也就以添上一个群空間而构成滿足方程(6·7·22) 的 Pfaff 式系和綫素(6·7·23)．

(ii) $a=0$.

这时

$$b^{i''}_{j''p}=0,\quad c^{p}_{st}=0. \tag{6·7·24}$$

与情形(i)一样得到

$$c^{i'}_{l'm'}b^{k''}_{h''i'}=b^{i''}_{h''l'}b^{k''}_{i''m'}-b^{i''}_{h''m'}b^{k''}_{i''l'}. \tag{6·7·25}$$

利用(6·7·24)和(6·7·25)，容易見到方程組

$$da^{i''}_{j''}=-b^{i''}_{k''a}a^{k''}_{j''}\omega^{a} \tag{6·7·26}$$

为完全可积．今設 $a^{i''}_{j''}(x^{\alpha})$ 为此方程組滿足初始条件

$$a^{i''}_{j''}(x^a_0)=\delta^{i''}_{j''}$$

的解，于此 x^a 为 $\omega^a=0$ 的初积分，因 $b^{i''}_{k''a}$ 关于 i'', k'' 反称，故 $(a^{i''}_{j''})$ 为正交陣.

令

$$\omega^{i''}=a^{i''}_{j''}\overline{\omega}^{j''},$$

代入 $D\omega^{i''}$ 的表示式后，則有

$$a^{i''}_{j''}D\overline{\omega}^{j''}=\frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}a^{j''}_{l''}a^{k''}_{m''}[\overline{\omega}^{l''},\ \overline{\omega}^{m''}]$$

$$+c^{i''}_{j''\rho}a^{j''}_{l''}[\overline{\omega}^{l''},\ \omega^\rho].$$

由此可見 $\overline{\omega}^{i''}$ 的特征系統为

$$\omega^{i''}=0\ (\text{卽}\ \overline{\omega}^{i''}=0)\quad \text{及}\quad \omega^\rho=0,$$

所以 $\overline{\omega}^{i''}$ 可用 $x^{j''}$, u^α, $dx^{j''}$ 表出，而 $x^{j''}$ 是 $\omega^{i''}=0$ 的独立的初积分，故对前式令 $x^a=x^a_0$, 則有

$$D\overline{\omega}^{i''}=\frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}[\overline{\omega}^{j''},\ \overline{\omega}^{k''}]+c^{i''}_{l''\rho}[\overline{\omega}^{l''},\ \omega^\rho]^{1)},\qquad(6\cdot7\cdot27)$$

从此可見

$$ds_2^2=(\omega^{q+1})^2+\cdots+(\omega^n)^2=(\overline{\omega}^{q+1})^2+\cdots+(\overline{\omega}^n)^2$$

$$=g_{i''j''}(x^{k''})dx^{i''}dx^{j''},\qquad(6\cdot7\cdot28)$$

而 ds_2^2 容許一运动群，它可由方程

$$\overline{\omega}^{i''}(\bar{x}^{j''},\ \bar{u}^\alpha,\ d\bar{x}^{j''})=\overline{\omega}^{i''}(x^j,\ u^\alpha,\ dx^{j''})\qquad(6\cdot7\cdot29)$$

确定. 又因 $(c^p_{i''j''})$ 在迷向群(卽 H)下不变，在此运动群下，外微分形式

$$H^p=\frac{1}{2}c^p_{i''j''}[\overline{\omega}^{i''},\ \overline{\omega}^{j''}]\quad(p=1,\ 2,\ 3)\qquad(6\cdot7\cdot30)$$

保持不变，依 § 6·2 的論述可知，H^p 仅与 $x^{i''}$, $dx^{i''}$ 有关.

又在(6·5·16)式中令 $k=p$, $l=a$, $m=s$, $h=b$,利用 $c^s_{ip}=0$,

---

1) 可以通过运算証明 $c^{i''}_{j''k''}$ 为群$(a^{i''}_{j''})$的不变張量，从而也可得出此式.

即得到

$$c^p_{ta}c^t_{sb}-c^p_{tb}c^t_{sa}-c^p_{sc}c^c_{ab}=0,$$

利用此式可驗証

$$d\varphi^p_s=-c^p_{ta}\varphi^t_s\omega^a \tag{6·7·31}$$

完全可积．設 $\varphi^p_s(x^a)$ 为滿足初始条件 $\varphi^p_s(x^a_0)=\delta^p_s$ 的解，可証明下列恒等式成立：

$$c^p_{j''k''}a^{j''}_{i''}a^{k''}_{m''}-\varphi^p_s c^s_{i''m''}=0. \tag{6·7·32}$$

事实上，将(6·7·32)左边微分一次后利用 $a^{i''}_{j''}$, φ^p_s 所滿足的微分方程及关系式(6·7·14)可知微分的結果是(6·7·32)的左边的綫性組合，但当 $x^a=x^a_0$ 时(6·7·32)式成立，因此(6·7·32)成立，所以

$$D\omega^p=c^p_{sa}[\omega^s,\ \omega^a]+\frac{1}{2}c^p_{ab}[\omega^a,\ \omega^b]+\varphi^p_s\Pi^s.$$

又置

$$\omega^p=\varphi^p_s\overline{\omega}^s, \tag{6·7·33}$$

那末

$$D\overline{\omega}^p=\frac{1}{2}c^s_{ab}\tilde{\varphi}^p_s[\omega^a,\ \omega^b]+\Pi^p, \tag{6·7·34}$$

其中 $\tilde{\varphi}^p_s$ 为 (φ^p_s) 的逆陣中的元素．两边外微分后，利用 Π^p 仅与 $x^{i''}$, $dx^{i''}$ 有关，$\frac{1}{2}c^s_{ab}\tilde{\varphi}^p_s[\omega^a,\ \omega^b]$ 仅与 x^a, dx^a 有关，可知二者的外微分均为 0，故可置

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}c^s_{ab}\tilde{\varphi}^p_s[\omega^a,\ \omega^b]=D\tilde{\omega}^p(x^a,\ dx^a)\\&\Pi^s=D\sigma^s(x^{i''},\ dx^{i''}),\end{aligned}\right. \tag{6·7·35}$$

所以

$$\omega^p=\varphi^p_s(x^a)\{dx^s+\tilde{\omega}^s(x^a,\ dx^a)+\sigma^s(x^{j''},\ dx^{j''})\}. \tag{6·7·36}$$

再令

$$\hat{\omega}^p=\varphi_s^p(x^a)\{dx^s+\widetilde{\omega}^s(x^a,\ dx^a)\},\qquad(6\cdot7\cdot37)$$

那末

$$D\hat{\omega}^p=c_{sa}^p[\hat{\omega}^s,\ \omega^a]+\frac{1}{2}c_{ab}^p[\omega^a,\ \omega^b],$$
$$D\omega^a=\frac{1}{2}c_{bc}^a[\omega^b,\ \omega^c].\qquad(6\cdot7\cdot38)$$

因此它們构成了 q 維李群 $G^{(1)}$ 的不变形式. 从(6·7·38)看出:

1° $G^{(1)}$ 中含有一个 3 維正常子群 N_3: $\omega^a=0$.

2° N_3 为 Abel 群.

3° $G^{(1)}$ 的綫性伴随群在 N_3' 中誘导出一个李代数基为(c_{sa}^p)的綫性群 K, 其元素 (φ_s^p) 滿足 $d\varphi_s^p=-c_{ta}^p\varphi_s^t\omega^a$, 由于 c_{sa}^p 关于 p, s 的反称性, K 是旋轉群.

总之,在这种情形下,空間綫素为

$$ds^2=g_{pq}\omega^p\omega^q+ds_1'^2+ds_2^2,\qquad(6\cdot7\cdot39)$$

其中

$$ds_1'^2=\sum_a(\omega^a)^2\qquad(6\cdot7\cdot40)$$

为容有以 ω^a 为不变形式的单純可迁运动群的 $q-3$ 維 Riemann 空間,而

$$ds_2^2=\sum_{i''}(\omega^{i''})^2=\sum_{i''}(\overline{\omega}^{i''})^2\qquad(6\cdot7\cdot41)$$

为 $n-q$ 維 Riemann 空間,它容有运动群 $G^{(2)}$: $\overline{\omega}^{i''}(\overline{x}^{j''},\overline{u}^a,d\overline{x}^{j''})=\overline{\omega}^{i''}(x^{j''},u^a,dx^{j''})$,这变换群还能使三个外微分形式 Π^p 不变. 如将 $G^{(2)}$ 扩大为 $\overline{G}^{(2)}$($x^a=x_0^a$ 即为其子群 $G^{(2)}$):

$$\omega^{i''}(\overline{x},\ \overline{u},\ d\overline{x})=\omega^{i''}(x,\ u,\ dx),\qquad(6\cdot7\cdot42)$$

显然它仍为 ds_2^2 的运动群,而此时由

$$c_{j''k''}^p a_{l''}^{j''}a_{m''}^{k''}=\varphi_s^p c_{l''m''}^s,$$

可見,在 $\overline{G}^{(2)}$ 的作用下有

$$\Pi^p(\overline{x}^{i''},\ d\overline{x}^{i''})=\widetilde{\varphi}_s^p(\overline{x}^a)\varphi_t^s(x^a)\Pi^t(x^{i''},\ dx^{i''}).$$

又因 Π^p 与 x^a, $\bar{x}^a$ 无关，所以

$$\Pi^p(\bar{x}^{i''}, d\bar{x}^{i''})=\psi^p_t(c^a)\Pi^t(x^{i''}, dx^{i''}), \qquad (6\cdot 7\cdot 43)$$

此处

$$\psi^p_t(c^a)=\tilde{\varphi}^p_s(\bar{x}^a)\varphi^s_t(x^a).$$

由于 (φ^p_s) 是由李代数 (c^p_{sq}) 所生成的，故属于旋轉群 K，因而 (ψ^p_t)亦属于 K 中，所以在 $\overline{G}^{(2)}$ 的作用下，这三个外微分形式受到 K 的作用.

为了决定群的有限方程，只須考察 $\omega^i(\bar{x}, \bar{u}, d\bar{x})=\omega^i(x, u, dx)$. 因为

$$\Pi^p(\bar{x}^{i''}, d\bar{x}^{i''})=\psi^p_t\Pi^t(x^{i''}, dx^{i''}),$$

所以

$$D\{\psi^p_t\sigma^t(x^{i''}, dx^{i''})-\sigma^p(\bar{x}^{i''}, d\bar{x}^{i''})\}=0,$$

故存在函数 $\psi^p(x^{i''}, c^{i''}, c^b, c^\rho)$，使

$$d\psi^p=\psi^p_t\sigma^t(x^{i''}, dx^{i''})-\sigma^p(\bar{x}^{i''}, d\bar{x}^{i''}).$$

这样就得到群的有限方程的形状为

$$\begin{aligned}
\bar{x}^p&=\varphi^p(x^s, x^b, c^s, c^b)+\psi^p(x^{i''}, c^{i''}, c^b, c^\rho),\\
\bar{x}^a&=\varphi^a(x^b, c^b),\\
\bar{x}^{i''}&=\varphi^{i''}(x^{j''}, c^b, c^{j''}, c^\rho),
\end{aligned} \qquad (6\cdot 7\cdot 44)$$

而 $G^{(1)}$ 的有限方程为

$$\begin{aligned}
\bar{x}^p&=\varphi^p(x^s, x^b, c^s, c^b),\\
\bar{x}^a&=\varphi^a(x^b, c^b).
\end{aligned} \qquad (6\cdot 7\cdot 45)$$

又

$$\bar{x}^{i''}=\varphi^{i''}(x^{j''}, c^b, c^{j''}, c^\rho) \qquad (6\cdot 7\cdot 46)$$

是 $\overline{G}^{(2)}$ 的方程.

我們容易看到，$G^{(1)}$ 表現为非素性曲面 V_q 的运动群. 此外，由于 $c^{i''}_{j''\rho}=c^{i''}_{ap}=c^{a}_{j''p}=c^{a}_{bp}=c^{i''}_{p\rho}=c^{a}_{p\rho}=0$，可知空間容有 ∞^{n-3} 个三維非素性曲面：

$$\omega^{i''}=0, \quad \omega^{a}=0,$$

而且它們均为全測地的．另一方面，由于在 $\omega^{i''}=0,\ \omega^{a}=0$ 上

$$D\omega^{p}=0,$$

因而这些全測地曲面具有欧氏綫素．

反过来，如果已給了一个具有上述性质 1°, 2°, 3° 的 q 維李群 $G^{(1)}$，并且已知一个 $n-q$ 維齐性 Riemann 空間 V_{n-q}，它的迷向群为复可約，实不可約，且其变换旋轉为 3 参数的，V_{n-q} 的运动群記为 $G^{(2)}$，則 $G^{(2)}$ 能使三个二次外微分形式不变，又 V_{n-q} 还可容有运动群 $\bar{G}^{(2)}\supseteq G^{(2)}$（也可以合于 $G^{(2)}$）而使这三个外形式按一旋轉群 K 而变化，我們就能参照上面的討論作出这一类型的齐性 Riemann 空間．

情形 3 d₂) $c_{m'}$ 不全为 0．

由 (6·7·14′) 式知道，

$$c^{t}_{sm'}-2\delta^{t}_{s}c_{m'}=-\left(c^{s}_{tm'}-2\delta^{s}_{t}c_{m'}\right), \tag{6·7·47}$$

所以

$$c^{1}_{1m'}=c^{2}_{2m'}=c^{3}_{3m'}=2c_{m'}, \tag{6·7·48}$$

$$c^{s}_{tm'}=-c^{t}_{sm'} \quad (t\neq s). \tag{6·7·49}$$

由此并可推得

$$c_{p}=0, \quad c^{p}_{tp}=0, \tag{6·7·50}$$

所以和情形 3 d_1) 一样地可証

$$B_{p}=aI_{p}.$$

先証这里的 a 必須为 0．如假設 $a\neq 0$，則类似于情形 3 d_1) 的 (i)，不妨設 $b^{i''}_{j''a}=0$，且有 $c^{\tau}_{i'm'}=0$，所以这时有

$$D\omega^{i''}=\frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}[\omega^{j''}, \omega^{k''}]+c_{a}[\omega^{i''}, \omega^{a}]$$
$$+b^{i''}_{j''p}[\omega^{j''}, \omega^{p}]+c^{i''}_{j''\rho}[\omega^{j''}, \omega^{\rho}].$$

在 (6·5·16) 式中令 $k=k''$, $l=l'$, $m=m'$, $h=h''$，即得

$$c^{k''}_{h''\tau}c^{\tau}_{l'm'}=-c^{i'}_{l'm'}\delta^{k''}_{h''}c_{i'}+(b^{i''}_{h''l'}b^{k''}_{i''m'}-b^{i''}_{h''m'}b^{k''}_{i''l}),$$

置 $k''=h''$, 作和,又合 $l'=b$, $m'=c$, 即得

$$c_a c^a_{bc}=0, \qquad (6\cdot7\cdot51)$$

所以 $D(c_a\omega^a)=0$, 因而有函数 $f(x^a)$, 使

$$c_a\omega^a=df(x^a), \qquad (6\cdot7\cdot52)$$

故有

$$D\omega^{i''}=\frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}[\omega^{j''},\ \omega^{k''}]+[\omega^{i''},\ df]$$
$$+b^{i''}_{j''p}[\omega^{j''},\ \omega^{p}]+c^{i''}_{j''\rho}[\omega^{j''},\ \omega^{\rho}].$$

置

$$\omega^{i''}=e^{-f}\overline{\omega}^{i''} \qquad (6\cdot7\cdot53)$$

则

$$D\overline{\omega}^{i''}=\frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}e^{-f}[\overline{\omega}^{j''},\ \overline{\omega}^{k''}]+b^{i''}_{j''p}[\overline{\omega}^{j''},\ \omega^{p}]$$
$$+c^{i''}_{j''\rho}[\overline{\omega}^{j''},\ \omega^{\rho}].$$

利用 § 5·4 的注 2 即得

$$c^{p}_{sa}=0,\quad c^{p}_{ab}=0.$$

所以我們有

$$\begin{aligned}
D\omega^{p}&=\frac{1}{2}c^{p}_{st}[\omega^{s},\ \omega^{t}]+e^{-2f}\frac{1}{2}c^{p}_{i''j''}[\overline{\omega}^{i''},\overline{\omega}^{j''}],\\
D\omega^{a}&=\frac{1}{2}c^{a}_{bc}[\omega^{b},\ \omega^{c}],\\
D\overline{\omega}^{i''}&=\frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}e^{-f}[\overline{\omega}^{j''},\ \overline{\omega}^{k''}]+b^{i''}_{j''p}[\overline{\omega}^{j''},\ \omega^{p}]\\
&\quad+c^{i''}_{j''\rho}[\overline{\omega}^{j''},\ \omega^{\rho}].
\end{aligned} \qquad (6\cdot7\cdot54)$$

从此可見 ω^p, $\overline{\omega}^{i''}$ 和 x^a 无关,且 $f\neq$const. 所以由 (6·7·54) 的第一式可見 $c^{p}_{i''j''}=0$, 这时和情形 3 d) 的假設矛盾,因此 $a\neq0$ 是不可能的,所以 a 必須为 0.

与情形 $3\,d_1$)的(ii)一样可知

$$b^{i''}_{j''p}=0 \text{ 及 } c^{s}_{tp}=0.$$

又在(6·5·16)式中令 $k=k''$, $l=l'$, $m=m'$, $h=h''$, 得

$$c^{k''}_{h''\tau}c^{\tau}_{l'm'}=-c^{i'}_{l'm'}\delta^{k''}_{h''}c_{i'}+(b^{i''}_{h''l'}b^{k''}_{i''m'}-b^{i''}_{h''m'}b^{k''}_{i''l'}),$$

令 $k''=h''$, 并作和, 得

$$c_a c^a_{bc}=0. \tag{6·7·55}$$

因而 $c_a\omega^a$ 为全微分, 存在函数 $f(x^a)$, 使

$$c_a\omega^a=df(x^a). \tag{6·7·56}$$

不失一般性, 可設

$$f(x^a_0)=1.$$

如置

$$\omega^{i''}=e^{-f(x^a)}a^{i''}_{j''}(x^a)\overline{\omega}^{j''}, \tag{6·7·57}$$

于此 $a^{i''}_{j''}$ 的意义和(6·7·2)相同, 因而

$$D\overline{\omega}^{i''}=\frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}\cdot e^{-f}[\overline{\omega}^{j''}, \overline{\omega}^{k''}]+c^{i''}_{j''\rho}[\overline{\omega}^{j''}, \omega^{\rho}].$$

連同

$$\begin{aligned} D\omega^p &= c^p_{sa}[\omega^s, \omega^a]+\frac{1}{2}c^p_{ab}[\omega^a, \omega^b]+\Omega^p, \\ D\omega^a &= \frac{1}{2}c^a_{bc}[\omega^b, \omega^c] \end{aligned} \tag{6·7·58}$$

在一起, 可知空間綫素为

$$ds^2=g_{pt}\omega^p\omega^t+ds_1'^2+e^{-2f}\sum(\overline{\omega}^{i''})^2, \tag{6·7·59}$$

其中

$$ds_1'^2=\sum_a(\omega^a)^2$$

为容有以 ω^a 为不变形式的单純可迁运动群的 $q-3$ 維 Riemann 空間.

如同以前一样可証 $\sum(\overline{\omega}^{i''})^2$ 为欧氏綫素, 故空間綫素又可写为

$$ds^2=g_{pt}\omega^p\omega^t+ds_1'^2+e^{-2f}((dx^{q+1})^2+\cdots+(dx^n)^2). \tag{6·7·60}$$

又因在笛卡儿坐标下，

$$\bar{\omega}^{i''}=h^{i''}_{j''}(u^a)\,dx^{j''},$$

而$(h^{i''}_{j''})$构成 H，与情形 3 d$_1$)的(ii)相仿，可知由

$$\bar{\omega}^{i''}(\bar{x},\ \bar{u},\ d\bar{x})=\bar{\omega}^{i''}(x,\ u,\ dx)$$

所确定的运动群使三个外微分形式

$$\Pi^p=\frac{1}{2}\,c^p_{i''j''}[\bar{\omega}^{i''},\ \bar{\omega}^{j''}]$$

不变，由于 $c^p_{i''j''}$ 为 H 的不变張量，可知 H 能使

$$\begin{aligned}\Pi^p&=\frac{1}{2}\,c^p_{i''j''}h^{i''}_{l''}h^{j''}_{m''}[dx^{l''},\ dx^{m''}]\\&=\frac{1}{2}\,c^p_{l''m''}[dx^{l''},\ dx^{m''}]\end{aligned}\qquad(6\cdot7\cdot61)$$

不变．另一方面，我們可以驗証

$$d\varphi^p_s=-c^p_{ta}\varphi^t_s\omega^a\qquad(6\cdot7\cdot62)$$

为完全可积，如設 φ^p_s 为其滿足初始条件

$$\varphi^p_s(x^a_0)=\delta^p_s$$

的解，置

$$\omega^p=\varphi^p_s\bar{\omega}^s,$$

与情形 3 d$_1$)的(i)一样可得到

$$\omega^p=\varphi^p_s(x^a)\{dx^s+\tilde{\omega}^s(x^a,\ dx^a)+\sigma^s(x^{j''},\ dx^{j''})\},\qquad(6\cdot7\cdot63)$$

故如置

$$\hat{\omega}^p=\varphi^p_s(x^a)\{dx^s+\tilde{\omega}^s(x^a,\ dx^a)\},\qquad(6\cdot7\cdot64)$$

則有

$$\left.\begin{aligned}D\hat{\omega}^p&=c^p_{sa}[\hat{\omega}^s,\ \omega^a]+\frac{1}{2}\,c^p_{ab}[\omega^a,\ \omega^b],\\D\omega^a&=\frac{1}{2}\,c^a_{bc}[\omega^b,\ \omega^c].\end{aligned}\right.\qquad(6\cdot7\cdot65)$$

故 $\hat{\omega}^p$, ω^a 构成一个 q 維李群 $G^{(1)}$ 的不变形式系，由其 Maurer-Cartan 方程可見，这群具有下列性质：

1° $G^{(1)}$ 包含一个三維正常子群 N_3: $\omega^a=0$.

2° 由于 $c^p_{st}=0$, N_3 为 Abel 群.

3° $G^{(1)}$ 的綫性伴随群在 N'_3 中誘导出一个相似群 K, 其元素(φ^p_s)满足

$$d\varphi^p_s=-c^p_{ta}\varphi^t_s\omega^a,$$

它之所以为相似群是因为 c^p_{ta} 滿足

$$c^p_{pa}=c_a \quad (p\ \text{不作和}),$$

$$c^p_{qa}=-c^q_{pa} \quad (p\neq q).$$

4° $G^{(1)}$ 中有一个$q-1$維正常子群,它包含了 N_3, 这从 $c_a\omega^a$ 为全微分即可推得.

为了求出运动群的有限方程,不妨取 $f=x^4$, 則运动群經过扩充后可写为

$$\begin{aligned}&\bar{x}^p=\varphi^p(x^s,\ x^b,\ c^s,\ c^b)+\psi^p(x^{i''},\ c^{i''},\ c^b,\ c^p),\\&\bar{x}^4=x^4+c^4,\\&\bar{x}^{a'}=\varphi^{a'}(x^a,\ c^a) \quad (a'=5,\ \cdots,\ q),\\&\bar{x}^{i''}=a^{i''}_{j''}(c^b,\ c^p)x^{j''}+c^{i''},\end{aligned} \tag{6·7·66}$$

其中 ψ^p 可类似于情形 3 d$_1$) 的(ii)作出, 而$(a^{i''}_{j''})$为 H 与它的交換旋轉群或其子群的直积.

同样,群$G^{(1)}$表現为V_q的运动群, 和前面一样可知 $\omega^{i''}=0$, $\omega^s=0$ 为非案性曲面,它們具有欧氏綫素.

反过来, 不難看出給了具有性质 1°～4° 的群 $G^{(1)}$ 后, 就能制作出这一类型的齐性 Riemann 空間.

最后, 我們看一下情形 3 c). 参照 § 4·6 的引理 4 的証明, 我們可选取可容許标形的基,使成立(6·7·9)的类似(只是$p=1$, 2; a, b, $c=3$, 4, $\cdots$, q), 因此也成立 (6·7·14′) 的类似, 但 s, p, $t=1$, 2. 令 $s=1$, 可以見到 $l^2_{m'}=0$, 同理有 $l^1_{m'}=0$, 因此

$$c^s_{tm'}=2\delta^s_t c_{m'}.$$

如所有 $c_{m'}=0$，也有(6·7·18)和(6·7·18′)．因为 p，q 只能为 1，2，所以得 $a_1=a_2=0$，$c_{12}^1=c_{12}^2=0$．(6·7·24)成立，可和 3 d$_1$) 的(ii)的討論完全类似地进行，最后的綫素形式仍为(6·7·39)，但 p，$q=1,2$．运动群的結构也相类似．又当 $c_{m'}$ 不全为 0 时，成立

$$c_{1m'}^1=c_{2m'}^2=2c_{m'},\quad c_{1m'}^2=c_{2m'}^1=0,$$

这时也必須 $B_1=B_2=0$，一切可和 3 d$_2$) 的(ii)一样进行，此时除 $p=1$，2 之外，还应置 φ_s^q 为 δ_s^p，綫素形状仍为(6·7·60)，群的結构也和 3 d$_2$)的結果完全类似．

因而成立

定理 設齐性 Riemann 空間的迷向群具不变向量，而在所有不变向量所成的子空間的直交补上为不可約，那末空間的綫素必为 (6·5·14)，(6·5·24)，(6·6·19)，(6·6·41)，(6·7·23)，(6·7·39)，(6·7·60) 的形状．

§6·8 依迷向群作出齐性 Riemann 空間的一个方案

研究齐性 Riemann 空間的根本問題是作出所有的齐性 Riemann 空間并研究相应的各种特殊 Riemann 空間的性质．这方面的探討已有很长历史，由于問題本身的复杂性，齐性 Riemann 空間的决定虽經許多学者的长期鉆研，获得了許多丰富結果，但还未到完全解决的程度．在 n 小时，問題已比較清楚，在 E. Cartan 的书上列举了 3 維齐性 Riemann 空間，而 4 維、5 維齐性 Riemann 空間的决定是 G. Vrancenu [1] 和 C. Teleman [1] 的結果[1]．但对一般 n 維齐性 Riemann 空間的决定就要困难得多．

E. Cartan 給出了依迷向群来决定空間的一个方案[5]，其想法是：給定迷向群之后，我們就可作出它的李代数的矩陣

[1] 但他們的工作还須作某些修改和补充．

$(c^i_{j\rho})$ $(i, j=1, 2, \cdots, n;\ \rho=n+1, \cdots, r)$，再考察 Jacobi 方程

$$c^A_{B(C}c^B_{DE)}=0 \quad (A, B, C, D, E=1, \cdots, r). \qquad (6\cdot8\cdot1)$$

将 c^A_{BC} 中的 $c^i_{j\rho}$ 作为已知的，又应有 $c^i_{\rho\sigma}=0$ 其余作为未知的．求解(6·8·1)，将这些 c^A_{BC} 解出后，根据李群的第三基本定理及其証明可作出 ω^i, ω^ρ，然后再根据

$$a_{il}c^l_{j\rho}+a_{lj}c^l_{i\rho}=0 \qquad (6\cdot8\cdot2)$$

得出 a_{ij}，则 $a_{ij}\omega^i\omega^j$ 就是所求的綫素[1]．

任意給定直交群的子群，(6·8·1)总是有解的，因为如果給定任意子群 $\bar{x}^i=a^i_j(u^1, \cdots, u^r)x^j$，则欧氏空間的运动群 $\bar{x}^i=a^i_j(u^{n+1}, \cdots, u^r)x^j+c^i$ 就以它为迷向群．但这只是一个平凡的特解．对給定直交群的子群依据上述方案确定出所有的以它为迷向群的齐性 Riemann 空間时，在解 Jacobi 方程的过程中就要遇到許多困难．在§6·5～§6·7 的論述中，我們对迷向群具不变向量的情形，找出对部分 c^i_{jk} 的几何解釋，这就有利于在这一情形下解出这些方程．

我們以 $n=3$ 为例来説明这个方案．这时运动群的参数至多是6，因而迷向群至多是3个参数的．而由于3維直交群无2維子代数，我們就可按下述情况分别討論．

（i）迷向群只含恒等变换．这时运动群为3参数且为单純可迁群，V_3 是容有单純可迁群的齐性 Riemann 空間，記群的不变形式为 $\omega^i(i=1, 2, 3)$，V_3 的綫素为

$$ds^2=c_{ij}\omega^i\omega^j, \qquad (6\cdot8\cdot3)$$

c_{ij} 为任意常数，但 (c_{ij}) 正定[2]．

（ii）迷向群为3参数的．这时运动群为6个参数的，V_3

---

[1] 应該指出，依照 E. Cartan 对无限連續群的研究[1]，我們只須考察方程(5·3·6～5·3·8)的可解性就已足够．

[2] 3参数李群的全体是早已决定的．

是常曲率空間.

(iii) 迷向群为单参数的. 我們可将李代数的基选为

$$(c_j^i)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}. \qquad (6\cdot8\cdot4)$$

这时方程 $a_{il}c^l_{j\rho}+a_{lj}c^l_{i\rho}=0$ 的解 a_{ij} 为

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&b\end{pmatrix}\quad a,\ b>0. \qquad (6\cdot8\cdot5)$$

在这情况下,迷向群有一个不变向量,在它的直交补上有一个交換旋轉,因此,可用 §6·6 的結果,我們可按当时的三种情形得出三种綫素.

(a) 綫素为可分(相当于 §6·6 情形 2 a)):

$$ds^2=(dx^1)^2+g_{\alpha\beta}(x^\gamma)dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha,\ \beta=2,\ 3), \quad (6\cdot8\cdot6)$$

式中的 $ds^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ 是二維的常曲率空間綫素.

(b) 綫素为半可約的(相当于 §6·6 情形 2 b)):

$$ds^2=(dx^1)^2+e^{-2x^1}((dx^2)^2+(dx^3)^2). \qquad (6\cdot8\cdot7)$$

(c) 相当于 §6·6 情形 2 c),这时成立

$$D\omega^2=[\omega^3,\omega],D\omega^3=-[\omega^2,\omega],D\omega=K[\omega^2,\omega^3]^{1)}. \quad (6\cdot8\cdot8)$$

容易驗証

$$\omega^2=\frac{\cos u\,dy-\sin u\,dz}{1+\frac{K}{4}(y^2+z^2)},$$

$$\omega^3=\frac{\sin u\,dy+\cos u\,dz}{1+\frac{K}{4}(y^2+z^2)}, \qquad (6\cdot8\cdot9)$$

$$\omega=\frac{\frac{K}{2}(y\,dz-z\,dy)}{1+\frac{K}{4}(y^2+z^2)}$$

---

1) 提醒一下, $\omega^1=dx^1+\omega$.

滿足(6·8·8)，而且依第三章可知，(6·8·8)的任何一解經过适当的变换后也可化为(6·8·9)，因此

$$ds^2 = a\left\{dx^1 + \frac{\frac{K}{2}(y\,dz - z\,dy)^2}{1+\frac{K}{4}(y^2+z^2)}\right\}^2$$

$$+ b\,\frac{dy^2+dz^2}{\left[1+\frac{K}{4}(y^2+z^2)\right]^2},$$

这便包括了§6·6的綫素(6·6·25)。

当时的情形2 d)不会发生，因为那时应有$q\geqslant 2$.

对$n=4$, $n=5$, 可以运用同一方案进行．但随着n的增大，这种作法也就越来越麻煩．我們在§6·9中要依另外的途徑，对一般的n，决定出运动群参数充分大的齐性 Riemann 空間的构造。

§6·9 关于旋轉群的一些定理

为了后文(§6·10)中討論 Riemann 空間运动群的参数問題的需要，我們在这里还要討論有关旋轉群的一些值得注意的性质，在其中包含了 C. Teleman 的一个有用的定理，但其証明方法已作了不少的改变，使和我們一貫使用的方法相协調，并且有了一定的簡化．此外，在本节中也包含了两个根据迷向群的性质来确定齐性 Riemann 空間的綫素的定理．

定理 1　設齐性 Riemann 空間V_n的迷向群分解为切空間中互补不变平面E_q与E_{n-q}上两旋轉群的直积，且E_{n-q}为不可約，又其上旋轉群沒有交換旋轉，則V_n的綫素可化为

(i) $ds^2=ds_1^2+ds_2^2=g_{i'j'}(x^{k'})dx^{i'}dx^{j'}+g_{i''j''}(x^{k''})dx^{i''}dx^{j''}$,

$$(6\cdot9\cdot1)$$

或

(ii) $ds^2=ds_1^2+e^{-2x^1}ds_2^2=g_{i'j'}(x^{k'})dx^{i'}dx^{j'}+e^{-2x^1}\sum_{i''}(dx^{i''})^2$

$(i', j', k'=1, \cdots, q; i'', j'', k''=q+1, \cdots, n)$. (6·9·2)

【証】 选直交可容許标形使 $e_{i'}$ 与 $e_{i''}$ 分别为 E_q 与 E_{n-q} 上的基向量，迷向群的李代数的基可取为

$$C_{\rho'}=\begin{pmatrix}c^{i'}_{j'\rho'} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad C_{\rho''}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & c^{i''}_{j''\rho''}\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}\rho'=1, \cdots, r_1\\ \rho''=r_1+1, \cdots, r\end{pmatrix}.$$

从 Jacobi 方程 (6·4·5) 中令 $k=k'$, $l=l'$, $m=m''$, $\rho=\rho''$ 并利用 E_{n-q} 中无不变共变向量的性质就推出

$$c^{k'}_{i''l'}=0. \qquad (6\cdot9\cdot3)$$

在(6·4·5)中令 $k=k'$, $l=l''$, $m=m''$, $\rho=\rho''$ 得到

$$c^{k'}_{i''l''}c^{i''}_{m''\rho''}+c^{k'}_{m''i''}c^{i''}_{l''\rho''}=0,$$

因而对固定的 k', $c^{k'}_{i''l''}$ 生成与 G'' 相交換的旋轉群，但由假定，G'' 无交換旋轉，因此成立

$$c^{k'}_{i''l''}=0. \qquad (6\cdot9\cdot4)$$

再令 (6·4·5) 中 $k=k''$, $l=l'$, $m=m'$, $\rho=\rho''$ 并利用 E_{n-q} 中无不变的反变向量这一事实，就得到

$$c^{i''}_{l'm'}=0. \qquad (6\cdot9\cdot5)$$

令 $k=k''$, $l=l''$, $m=m'$, $\rho=\rho''$ 可得

$$c^{i''}_{l''m'}c^{k''}_{i''\rho''}-c^{k''}_{i''m'}c^{i''}_{l''\rho''}=0,$$

与 §6·5 中类似地可推出

$$c^{i''}_{j''k'}=c_{k'}\delta^{i''}_{j''}+l^{\rho''}_{k'}c^{i''}_{j''\rho''}. \qquad (6\cdot9\cdot6)$$

因而

$$D\omega^{i'}=\frac{1}{2}c^{i'}_{j'k'}[\omega^{j'}, \omega^{k'}]+c^{i'}_{j'\rho'}[\omega^{j'}, \omega^{\rho'}],$$

$$D\omega^{i''}=c^{i''}_{j'k''}[\omega^{j'},\ \omega^{k''}]+\frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}[\omega^{j''},\omega^{k''}]$$

$$+c^{i''}_{j''\rho''}[\omega^{j''},\ \omega^{\rho''}].$$

注意到(6·9·6)式并利用 $\omega^{\rho''}+l^{\rho''}_{k'}\omega^{k'}$ 来代替 $\omega^{\rho''}$ 就得到

$$D\omega^{i''}=\frac{1}{2}c^{i''}_{j''k''}[\omega^{j''},\ \omega^{k''}]+c_{k'}[\omega^{i''},\ \omega^{k'}]$$

$$+c^{i''}_{j''\rho''}[\omega^{j''},\ \omega^{\rho''}],\tag{6·9·7}$$

因而看到 $\omega^{i'}=0$ 与 $\omega^{i''}=0$ 分别是完全可积的，初积分各自为 $x^{i'}$, $x^{i''}$. 与 § 6·5 中类似的方法可得：当所有 $c_{k'}=0$ 时，

$$ds^2=g_{i'j'}(x^{k'})dx^{i'}dx^{j'}+g_{i''j''}(x^{k''})dx^{i''}dx^{j''}.$$

当 $c_{k'}$ 中至少有一个不等于0时，

$$ds^2=g_{i'j'}(x^{k'})dx^{i'}dx^{j'}+e^{-2x^1}\sum_{i''}(dx^{i''})^2.$$

定理証毕.

以下討論常曲率空間的某些性质.

引理1 設 V_n 为 n 維的齐性 Riemann 空間 G/H, 綫素为 ds^2, 迷向群为不可約，如果在这空間中另有一变换群 $G_1\supset G$, 又 G_1 使另一綫素 ds_1^2 不变，那末 ds_1^2 和 ds^2 只相差一个常数因子.

【証】 因 $G_1\supset G$, 所以 G 也为綫素 ds_1^2 的可迁运动群，但迷向群为不可約的变換群的不变綫素除一常数因子外是唯一确定的，故有引理1的結論.

下述定义是 C. Teleman 首先引进的.

定义 設 H 为 n 維空間的一个不可約旋轉群，如把 H 看做单位球面上的运动群时，它为局部可迁且迷向群不可約，那末称 H 为不可析的，否則，就称它为可析的.

成立下述

定理2 設 V_n 为 n 維齐性 Riemann 空間，其迷向群为不可

析的，那末空間必为常曲率的.

【証】 取 V_n 关于一点 O 的法坐标 $(x^1, \cdots, x^n)$，O 点的迷向群和安定群 H 有同一的坐标表达式，取定一个正常数 t，集合 Q_t:

$$(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2=t^2$$

是 V_n 的一个 $n-1$ 維子空間，H 是作用在 Q_t 上的运动群(参考于 V_n 的誘导綫素)，由假定可知其迷向群为不可約的. 另一方面，直交群 $O(n)$ 也可視作 Q_t 上的变换群，它包含 H，且能使 $n-1$ 維正常曲率空間的綫素不变，因此依引理 1，Q_t 上的綫素为正常曲率的，并且 Q_t 以 $O(n)$ 在其上的誘导群为运动群. 由于 t 是任意的，所以 V_n 在任一 Q_t 上的誘导綫素在 $O(n)$ 下为不变，又 $O(n)$ 使 O 点出发的測地綫上任两点的測地距离不变，且这种測地綫必和 Q_t 垂直，因此 $O(n)$ 也为 V_n 的运动群，从而 V_n 容有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 参数的安定群，V_n 为常曲率空間. 定理 2 証毕.

我們还要討論有关正常曲率空間的一些有用的性質.

定理 3 設单位球面的綫素已写成为半可約形式

$$ds^2=g_{i'j'}(x^{l'})dx^{i'}dx^{j'}+\sigma(x^{l'})g_{i''j''}(x^{l''})dx^{i''}dx^{j''}$$

$$(i', j', l'=1, \cdots, q;\ i'', j'', l''=q+1, \cdots, n). \tag{6·9·8}$$

如 $n-q>1$，那末必能通过 $x^{i'}$ 之間的坐标变换使綫素化为

$$ds^2=(dx^1)^2+\sin^2 x^1 \underset{0}{g}_{ab}(x^c)dx^a dx^b$$
$$+\cos^2 x^1 g_{i''j''}(x^{l''})dx^{i''}dx^{j''}, \tag{6·9·9}$$

式中 $a, b=2, \cdots, q$，$g_{i''j''}(x^{k''})dx^{i''}dx^{j''}$ 为正常曲率空間的綫素，其曲率为 1. 又当 $q\geqslant 3$ 时，$\underset{0}{g}_{ab}(x^c)dx^a dx^b$ 也为正常曲率的綫素，曲率为 1.

【証】 記以 $g_{i'j'}(x^{l'})dx^{i'}dx^{j'}$ 和 $g_{i''j''}(x^{l''})dx^{i''}dx^{j''}$ 为綫素的 Riemann 空間的曲率張量为 $\underset{0}{R}_{i'j'k'l'}$ 和 $\underset{0}{R}_{i''j''k''l''}$，而綫素(6·9·8)

的 Riemann 曲率張量为 R_{ijkl}. 直接計算可知

$$
\left.\begin{aligned}
&R_{i'j'k'l'}=\underset{0}{R}_{i'j'k'l'},\\
&R_{i''j''k''l''}=\sigma(x^{h'})\underset{0}{R}_{i''j''k''l''}\\
&\qquad+\frac{1}{4}g^{h'm'}\frac{\partial\sigma}{\partial x^{h'}}\frac{\partial\sigma}{\partial x^{m'}}(g_{j''k''}g_{i''l''}-g_{i''k''}g_{j''l''}),\\
&R_{i'j'k'l''}=0,\\
&R_{i'j''k''l''}=0,\\
&R_{i'j''k'l''}=-\frac{1}{2}g_{j''l''}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^{i'}\partial x^{k'}}\\
&\qquad+\frac{1}{4}g_{j''l''}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x^{i'}}\frac{\partial\sigma}{\partial x^{k'}}\\
&\qquad+\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial x^{h'}}\left\{\begin{matrix}h'\\ i'k'\end{matrix}\right\}_0 g_{j''l''},
\end{aligned}\right\}\quad(6\cdot9\cdot10)
$$

式中 $\left\{\begin{matrix}h'\\ i'k'\end{matrix}\right\}_0$ 表示綫素 $g_{i'j'}(x^{l'})dx^{i'}dx^{j'}$ 的第一类 Christoffel 記号. 因綫素(6·9·8)为正常曲率, 且曲率为 1, 所以有

$$
R_{ijkl}=(a_{il}a_{jk}-a_{ik}a_{jl}),\qquad(6\cdot9\cdot11)
$$

式中

$$
a_{i'j'}=g_{i'j'},\quad a_{i''j''}=\sigma g_{i''j''},\quad a_{i''j'}=0.
$$

由(6·9·10) 第 1 式可見, $g_{i'j'}(x^{l'})dx^{i'}dx^{j'}$ 为常曲率綫素, 曲率为 1. 又由(6·9·10)第 2 式可見

$$
\underset{0}{R}_{i''j''k''l''}
=\left(\sigma+\frac{1}{4}\frac{1}{\sigma}g^{h'm'}\frac{\partial\sigma}{\partial x^{h'}}\frac{\partial\sigma}{\partial x^{m'}}\right)(g_{i''k''}g_{j''l''}-g_{i''l''}g_{j''k''}),
$$

由此可見, $g_{i''j''}(x^{l''})dx^{i''}dx^{j''}$ 是常曲率的, 且因 $\sigma>0$, $g^{i'j'}\frac{\partial\sigma}{\partial x^{i'}}\frac{\partial\sigma}{\partial x^{j'}}\geqslant0$, 故曲率为正, 調整 σ 的因子, 就可設它的曲率为 1. 因此就有

$$
\sigma+\frac{1}{4}\frac{1}{\sigma}g^{i'j'}\frac{\partial\sigma}{\partial x^{i'}}\frac{\partial\sigma}{\partial x^{j'}}=1,\qquad(6\cdot9\cdot12)
$$

$$
0<\sigma\leqslant1.
$$

因常曲率空間不是乘积空間，所以 $\sigma \neq \text{const}$，因此可选 $x^{i'}$，使 $\sigma=\cos^2 x^1$，x^1 曲綫和曲面 $x^1=\text{const}$ 垂直，因而有 $g_{1a}=0(a=2, \cdots, q)$，这时为使(6·9·12)满足，则必有 $g^{11}=1$. 再由 $g^{1i'}g_{i'1}=1$ $(i'=1, \cdots, q)$ 就可推出

$$g_{11}=1.$$

再由(6·9·10)最后一式可見

$$\sigma g_{i'j'}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}+\frac{1}{4\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x^{i'}}\frac{\partial\sigma}{\partial x^{j'}}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial x^{l'}}\left\{\begin{matrix} l' \\ i'j' \end{matrix}\right\}_0.$$

令 $i'=a$, $j'=b$ 就可得出

$$\cos^2 x^1 g_{ab}=\frac{1}{2}\cos x^1 \sin x^1 \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^1},$$

由此

$$g_{ab}=\sin^2 x^1 \underset{0}{g_{ab}}(x^c).$$

因而綫素就具(6·9·9)的形式. 当 $q\geqslant 3$ 时，重复上面的計算，可見 $\underset{0}{g_{ab}}dx^a dx^b$ 是曲率为1的常曲率綫素. 定理証毕.

已知 $(n+1)$ 維欧氏空間 E_{n+1} 的全直交群 $O(n+1)$ 的一个子群 L，那末依前面所述，L 必可視为曲率为 $+1$ 的 n 維常曲率空間的运动群. 現証明

定理 4　設 $n+1$ 維欧氏空間的单位球面 S_n 的綫素已取为(6·9·8) $(n-1>q>2)$，如 $O(n+1)$ 的子群 L 在 S_n 上的誘导群为非混合运动群且能使 x^1 不变，則 L 必为 $O(n+1)$ 的可約子群.

【証】　設 $z^\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n+1)$ 为 $n+1$ 維欧氏空間 E_{n+1} 的直交笛卡儿坐标，S_n 在参数表示

$$z^\alpha=F^\alpha(x) \tag{6·9·13}$$

之下具有綫素(6·9·9)，因 $\underset{0}{g_{ab}}(x^c)dx^a dx^b$，$g_{i''j''}(x^{k''})dx^{i''}dx^{j''}$ 是曲率为1的常曲率綫素，所以它們分别是 $q-1$ 維和 $n-q$ 維欧

氏空間单位球面的綫素，因此存在函数 $f^A(x^b)$ $(A=1, \cdots, q)$, $f^P(x^{i''})$ $(P=q+1, \cdots, n+1)$ 使 $\sum(f^A)^2=1$, $\sum(f^P)^2=1$, 且

$$\sum(df^A)^2=\underset{0}{g}_{ab}(x^c)dx^a dx^b,$$
$$\sum(df^P)^2=g_{i''j''}(x^{k''})dx^{i''}dx^{j''}.$$

于是容易見到

$$y^\alpha=G^\alpha(x^1, \cdots, x^n)=\begin{cases} f^A(x^b)\sin x^1 & (A=1,2,\cdots,q), \\ f^P(x^{i''})\cos x^1 & (P=q+1,\cdots,n) \end{cases} \qquad (6\cdot9\cdot14)$$

滿足 $\sum(y^\alpha)^2=1$, 而 $\sum(dy^\alpha)^2$ 即为 $(6\cdot9\cdot9)$, 依据超曲面安装的熟知的定理(Eisenhart[1]),

$$G^\beta(x^1, \cdots, x^n)=c^\alpha_\beta F^\beta(x^1, \cdots, x^n).$$

c^α_β 为直交陣，所以在 E_{n+1} 选取坐标

$$y^\alpha=c^\alpha_\beta z^\beta,$$

則参数表示$(6\cdot9\cdot13)$就化为$(6\cdot9\cdot14)$. 因 L 为非混合的，x^1 是不变的，所以在变量 $x^1, \cdots, x^n$ 之下，群 L 中的每一变换的方程中必有一部分具形状

$$\bar{x}^{i''}=\varphi^{i''}(x^{j''})$$

的方程，这表示在$(y^1, \cdots, y^{n+1})$坐标之下，由$(6\cdot9\cdot14)$, L 的每一变换的方程中包括了方程

$$\bar{y}^P=a^P_Q y^Q \quad (P, Q=q+1, \cdots, n),$$

从此可見，H 为可約子群，定理証毕.

下面討論有关迷向群和旋轉群的阶数的一系列性質.

定理 5 設 H_1 为 n 維空間的旋轉群，有互补的不变平面 E_q 和 E_{n-q}, 那末可适当选取 H_1 的李代数 H_1' 的基，使在适当的坐标系統下，它們具形状

$$C_{\rho_1}=\begin{pmatrix} c^{i'}_{j'\rho_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{\rho_2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c^{i''}_{j''\rho_2} \end{pmatrix}, \quad C_{\rho_3}=\begin{pmatrix} c^{i'}_{j'\rho_3} & 0 \\ 0 & c^{i''}_{j''\rho_3} \end{pmatrix}$$
$$(i', j'=1, \cdots, q;\ i'', j''=q+1, \cdots, n), \qquad (6\cdot9\cdot15)$$

其中 $\{C_{\rho_1}\}$, $\{C_{\rho_2}\}$, $\{C_{\rho_3}\}$ 各生成 H_1' 的理想子代数，又 $(c^{i'}_{j'\rho_3})$ 和 $(c^{i''}_{j''\rho_3})$ 为两个同构的綫性李代数的相对应的基.

【証】 选标准正交基 e_i, 使 $e_{i'}\in E_q$, $e_{i''}\in E_{n-q}$, 则 H_1' 的李代数的基具形状

$$A_\sigma=\begin{pmatrix} a^{i'}_{j'\sigma} & 0 \\ 0 & a^{i''}_{j''\sigma}\end{pmatrix}.$$

設 $l^\sigma a^{i''}_{j''\sigma}=0$ 有 r_1 組独立解，記为 $l^\sigma_{\rho_1}$ $(\rho_1=1, \cdots, r_1)$, 又 $l^\sigma a^{i'}_{j'\sigma}=0$ 有 r_2 組独立解，記为 $l^\sigma_{\rho_2}$ $(\rho_2=r_1+1, \cdots, r_1+r_2)$, 又 $l^\sigma_{\rho_1}$, $l^\sigma_{\rho_2}$ 必为綫性独立的，再选 $l^\sigma_{\rho_3}$ $(\rho_3=r_1+r_2+1, \cdots, r)$, 于此 r 为 H_1 的阶数，使 $\det|l^\sigma_\rho|\neq 0$. 令 $l^\sigma_{\rho_1}A_\sigma=C_{\rho_1}$, $l^\sigma_{\rho_2}A_\sigma=C_{\rho_2}$, $l^\sigma_{\rho_3}A_\sigma=D_{\rho_3}$, 則 C_{ρ_1}, C_{ρ_2}, D_{ρ_3} 构成 H_1' 的一組基，易見 C_{ρ_1}, C_{ρ_2} 已具(6·9·15)中的 C_{ρ_1} 和 C_{ρ_2} 的形状，且直接可見到$\{C_{\rho_1}\}$ 和 $\{C_{\rho_2}\}$各生成理想子代数. 由于 H_1' 为紧致李代数，故可把 C_{ρ_1} 和 C_{ρ_2} 的适当綫性組合加入 D_{ρ_3} 中去，得到

$$C_{\rho_3}=\begin{pmatrix} c^{i'}_{j'\rho_3} & 0 \\ 0 & c^{i''}_{j''\rho_3}\end{pmatrix},$$

而能使 $\{C_{\rho_3}\}$ 也构成 H_r 的一个理想子代数，由 C_{ρ_3} 的作法可見

$$l^{\rho_3}c^{i'}_{j'\rho_3}=0 \quad 和 \quad l^{\rho_3}c^{i''}_{j''\rho_3}=0$$

均能分别推出 $l^{\rho_3}=0$, 因此以 $(c^{i'}_{j'\rho_3})$ 和 $(c^{i''}_{j''\rho_3})$ 为基的李代数的維数相同，均为 $r-r_1-r_2$. 又从

$$[C_{\rho_3}, C_{\sigma_3}]=c^{\tau_3}_{\rho_3\sigma_3}C_{\tau_3}$$

可直接看出，这两个李代数同构，$(c^{i'}_{j'\rho_3})$ 和 $(c^{i''}_{j''\rho_3})$ 为相互对应的基. 定理証毕.

这个定理对于討論迷向群可約但不分为直积的齐性 Riemann 空間很有作用. 我們在这里举出一个在下文中有直接应用的这样的結果(見胡和生[5]).

定理 6 設齐性 Riemann 空間 V_n 的运动群的迷向群 H 为

可約，E_q 和 E_{n-q} 为它的互补的不变平面，又 H 在 E_q 和 E_{n-q} 上的誘导群分别为全直交群 $O(q)$ 和 $O(n-q)$，但 $H\neq O(q)\times O(n-q)$，当 $n>4, n\neq 6,7$ 时，則 $q=n-q$ 且 V_n 为欧氏空間.

【証】 我們选直交可容許标形使 $e_{i'}$ 与 $e_{i''}$ 为 E_q 与 E_{n-q} 上的基向量. 又把迷向群李代数的基选为定理 5 中 (6·9·15)，这时 $(c^{i'}_{j'\rho_1})$ 和 $(c^{i'}_{j'\rho_2})$ 构成 $O(q)$ 的基，$(c^{i''}_{j''\rho_1})$ 和 $(c^{i''}_{j''\rho_2})$ 构成 $O(n-q)$ 的基，暂設 q 和 $n-q$ 都不等于 4. 因为 $O(q)$ 和 $O(n-q)$ 都是单純群，而迷向群又不为 $O(q)\times O(n-q)$，所以其李代数的基只能是

$$C_\rho=\begin{pmatrix} c^{i'}_{j'\rho} & 0 \\ 0 & c^{i''}_{j''\rho} \end{pmatrix},\quad \rho=1,\ \cdots,\ \frac{q(q-1)}{2} \tag{6·9·16}$$

且 $(c^{i'}_{j'\rho})$ 和 $(c^{i''}_{j''\rho})$ 为同构的綫性李代数的对应的基，因此就必須有 $q=n-q$. 因 $O(q)$ ($q>2$ 时) 为非一維的单純群，所以能选空間的基 $e_{i'}$，$e_{i''}$ 使

$$(c^{i'}_{j'\rho})=(c^{i''}_{j''\rho}), \tag{6·9·17}$$

并构成 $O(q)$ 的綫性李代数的基，还可适当地选取它們，使 ρ 用指标 $(l'm')$ 代替 $(l'>m')$，而

$$c^{i'}_{j'(l'm')}=\delta^{i'}_{l'}\delta_{j'm'}-\delta^{i'}_{m'}\delta_{j'l'}.$$

在 Jacobi 方程(6·4·5)

$$c^i_{h\rho}c^h_{jk}-c^h_{j\rho}c^i_{hk}-c^h_{k\rho}c^i_{jh}=0$$

中，令 $i=i'$, $j=j'$, $k=k'$ 代入，并置 $\rho=(l'm')$，我們得

$$\delta_{j'm'}c^{i'}_{l'k'}-\delta_{j'l'}c^{i'}_{m'k'}+\delta_{k'm'}c^{i'}_{j'l'}-\delta_{k'l'}c^{i'}_{j'm'}-\delta^{i'}_{l'}c^{m'}_{j'k'}+\delta^{i'}_{m'}c^{l'}_{j'k'}=0.$$

从此就容易得出(这一点让讀者自己来作出)

$$c^{i'}_{j'k'}=0. \tag{6·9·18}$$

又在(6·4·5)中置 $i=i'$, $j=j''$, $k=k''$，我們得

$$c^{i'}_{h'\rho}c^{h'}_{j''k''}-c^{h''}_{j''\rho}c^{i'}_{h''k''}-c^{h''}_{k''\rho}c^{i'}_{j''h''}=0.$$

注意到(6·9·17)式，就可类似于(6·9·18)式而得出

$$c^{i'}_{j''k''}=0. \tag{6·9·19}$$

同理可有

$$c^{i''}_{j''k''}=0, \quad c^{i''}_{j'k'}=0. \tag{6·9·20}$$

再在 (6·4·5) 中置 $i=i'$, $j=j'$, $k=k''$, 又令 $\rho=(a'b')$, $a'>b'$ $(a,\ b=1,\ \cdots,\ q)$. 我們就有

$$c^{b'}_{j'k''}\delta^{i'}_{a'}-\delta^{i'}_{b'}c^{a'}_{j'k''}-c^{i'}_{j'a''}\delta_{k''b''}+c^{i'}_{j'b''}\delta_{k''a''}-c^{i'}_{a'k''}\delta_{j'b'}$$
$$+c^{i'}_{b'k''}\delta_{j'a'}=0,$$

式中 $a''=q+a'$, $b''=q+b'$. 置 $a'\neq b'$; $i'\neq a'$, b'; $k''\neq q+a'$, $q+b'$; $j'=a'$, 我們得到

$$c^{i'}_{b'k''}=0 \quad (i'\neq b',\ k''\neq b''),$$

再置 $a'\neq b'$; i', $j'\neq a'$, b'; $k''=a''$, 就得到

$$c^{i'}_{j'b''}=0 \quad (i',\ j'\neq b''-q).$$

又置 $a'\neq b'$, $i'=a'$, $j'=b'$, $k''=a''$, 就可得

$$c^{a'}_{b'b''}=c^{a'}_{a'a''} \quad (a'\neq b'),$$

置 $a'\neq b'$, $i'=j'=a'$, $k''=a''$, 得

$$c^{b'}_{a'a''}=0 \quad (b'\neq a').$$

从这些式子就得出

$$c^{i'}_{j'k''}=0. \tag{6·9·21}$$

同理也有

$$c^{i''}_{j''k'}=0. \tag{6·9·22}$$

因而 Cartan-Maurer 方程就取形式

$$D\omega^{i'}=c^{i'}_{j'\rho}[\omega^{j'},\ \omega^{\rho}], \quad D\omega^{i''}=c^{i''}_{j''\rho}[\omega^{j''},\ \omega^{\rho}]. \tag{6·9·23}$$

从这两个式子可見到, $D\widetilde{\omega}^{\rho}=\frac{1}{2}c^{\rho}_{\sigma\tau}[\omega^{\rho},\ \widetilde{\omega}^{\tau}]$. 因而 $\omega^{\rho}=0$ 定义了空間的运动群的一个可迁子群,对于这个子群, ω^{i} 化为 $\overline{\omega}^{i}$,又利用(6·9·23)就有

$$D\overline{\omega}^{i'}=0, \quad D\overline{\omega}^{i''}=0.$$

从此可見 $\overline{\omega}^{i'}$, $\overline{\omega}^{i''}$ 为全微分 $dx^{i'}$,$dx^{i''}$,因而空間的綫素为欧氏的.

再設 $q=4$，因 $O(4)$ 为两个和 $O(3)$ 同构的正常子群的直积，在 $n\neq 7$ 时，就只能有 $n=8$. 这时可能有两种情形

（i） 迷向群为 6 参数的，其李代数的基可选为

$$\begin{pmatrix} c^{i'}_{j'\rho} & 0 \\ 0 & c^{i''}_{j''\rho} \end{pmatrix} \quad (\rho=9,\ 10,\ \cdots,\ 14),$$

$(c^{i'}_{j'\rho})=(c^{i''}_{j''\rho})$ 为 $O(4)$ 的李代数的基. 这时，和上述的討論完全一样地可得出空間为欧氏的結論.

(ii) 迷向群为 9 参数的，其李代数的基可选为

$$\begin{pmatrix} c^{i'}_{j'\rho_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c^{i''}_{j''\rho_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c^{i'}_{j'\rho_3} & 0 \\ 0 & c^{i''}_{j''\rho_3} \end{pmatrix}$$

$$(\rho_1=9,\ 10,\ 11;\ \rho_2=12,\ 13,\ 14;\ \rho_3=15,\ 16,\ 17),$$

$(c^{i'}_{j'\rho_1})=(c^{i''}_{j''\rho_2})$ 为 $O(4)$ 的一个 3 参数正常子群的李代数的基. 这时的基还可改为

$$\begin{pmatrix} c^{i'}_{j'\rho_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c^{i'}_{j'\rho} & 0 \\ 0 & c^{i''}_{j''\rho} \end{pmatrix} \quad (\rho=12,\ 13,\ \cdots,\ 17),$$

式中 $(c^{i'}_{j'\rho})=(c^{i''}_{j''\rho})$ 为 $O(4)$ 的李代数的基；由于迷向群包含了这些元素，我們照样地可得出 $c^{i}_{jk}=0$, 因而有

$$\begin{aligned} D\omega^{i'} &= c^{i'}_{j'\rho_1}[\omega^{j'},\ \omega^{\rho_1}]+c^{i'}_{j'\rho}[\omega^{j'},\ \omega^{\rho}], \\ D\omega^{i''} &= c^{i''}_{j''\rho}[\omega^{j''},\ \omega^{\rho}]. \end{aligned} \tag{6·9·24}$$

从此可見 V_8 为两个常曲率空間 S'_4 和 S''_4 的乘积空間. 依据 $O(4)$ 的性质可知，必能选取 ω^{ρ}，使 ω^{ρ} 分为 ω^{ρ_2}, ω^{ρ_3}, 成立

$$(c^{i'}_{j'\rho_2})=(c^{i'}_{j'\rho_1}) \quad (\rho_2=\rho_1+3).$$

又令 $\widetilde{\omega}^{\rho_2}=\omega^{\rho_1}+\omega^{\rho_2}$, 則(6·9·24)可改写为

$$D\omega^{i'}=c^{i'}_{j'\rho_2}[\omega^{j'},\ \widetilde{\omega}^{\rho_2}]+c^{i'}_{j'\rho_3}[\omega^{j'},\ \omega^{\rho}],$$

$$D\omega^{i''}=c^{i''}_{j''\rho_2}[\omega^{j''},\ \omega^{\rho_2}]+c^{i''}_{j''\rho_3}[\omega^{j''},\ \omega^{\rho_3}],$$

$\omega^{i'}$, $\omega^{i''}$, ω^{ρ_1}, $\widetilde{\omega}^{\rho_2}$, ω^{ρ_3} 为独立的 Pfaff 式，由第一套式子可見，$D\widetilde{\omega}^{\rho_2}$ 能由 $\omega^{j'}$, $\widetilde{\omega}^{\rho_2}$, ω^{ρ_3} 表示，又由第二套式子可見 $D\omega^{\rho_2}$ 可由

$\omega^{j''}$, ω^{ρ_2}, ω^{ρ_3} 表示,因而

$$D\omega^{\rho_3}=\frac{1}{2}c^{\rho_3}_{\sigma_3\tau_3}[\omega^{\sigma_3},\ \omega^{\tau_3}],$$

因为 $\omega^{i'}$, $\tilde{\omega}^{\rho_1}$, ω^{ρ_3} 为 S'_4 的完全运动群的全系的不变 Pfaff 式,所以 S'_4 的运动群有正常子群,这表示 $S'_4=E_4$. 同理 $S''_4=E_4$, 因此 V_8 是欧氏的. 定理証毕.

注 在 $n=7$ 时,相应的 V_7 为 $E_4\times S_3$,这里 S_3 为正常曲率空間(見胡和生[5]), E_4 为欧氏空間.

利用定理 5 可得出下述有用的

定理 7 設 H 为 n 維全直交群 $O(n)$ 的一个可約子群,它有两个互补的不变平面 E_q 和 E_{n-q}, 設 H 在 E_q, E_{n-q} 上的誘导分別为 K 和 L, 且 L 为不可約,又 H 的阶数 $\geqslant\left[\frac{n-q}{2}\right]^2+\frac{q(q-1)}{2}$,那末 H 必分解为 K 和 L 的直积.

【証】 依定理 5, 必可选 H 的李代数 H' 的基使具形状 (6·9·15). 显然 $(c^{i'}_{j'\rho_1})$, $(c^{i'}_{j'\rho_2})$ 为 K 的李代数的基, $(c^{i''}_{j''\rho_2})$, $(c^{i''}_{j''\rho_3})$ 为 L 的李代数的基.

如 H 不为 K 和 L 的直积,那末 $\{C_{\rho_3}\}$ 不为空集,又 $\{C_{\rho_2}\}$ 也不为空集,否則 H 的阶数 $\leqslant\frac{q(q-1)}{2}$,此为不可能. 考察 $(c^{i''}_{j''\rho_3})$ 所生成的李代数 F. 如 F 为不可約,因 F 至少有单参数的交換旋轉,因此 $n-q$ 为偶数,且因 $(c^{i''}_{j''\rho_3})$ 也和 $(c^{i''}_{j''\rho_2})$ 可交換,故 F 的阶数 $\leqslant\left[\frac{n-q}{2}\right]^2$, 因此 H 的阶数 $<\left[\frac{n-q}{2}\right]^2+\frac{q(q-1)}{2}$,此为不可能.

如 F 为可約,那末 E_{n-q} 可分解为 F 的一些不可約的不变平面的直积, F 就分成若干块. 如果在这些分块之中出現不等价的直交子代数,那末 E_{n-q} 就有一个 F 的眞正的不变子空間 E, 因为 $(c^{i''}_{j''\rho_2})$ 中每一元素和 F 均可交換,所以 E 也是 $(c^{i''}_{j''\rho_2})$ 所生

成的李代数的不变子空間，因此群 L 为可約的，这和假設矛盾．如果 F 分解成相互等价的直交子代数，那末，

$$F \text{ 的阶数} \leqslant \frac{\frac{n-q}{2}\left(\frac{n-q}{2}-1\right)}{2} < \left[\frac{n-q}{2}\right]^2,$$

因此也有：H 的阶数 $<\left[\frac{n-q}{2}\right]^2+\frac{q(q-1)}{2}$．

最后，我們要給出下述定理的証明．

定理 8（C. Teleman）$O(n)$ 的不可約的可析子群 H 的阶数 $\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]^2$．

在証明这定理之前，先引入两个簡单的引理．

引理 2 設 K 为 $O(m)$ 的一个可約子群，如果 K 的最大的不可約不变平面的維数 $\leqslant\left[\frac{m}{2}\right]$，則

$$K \text{ 的阶数} \leqslant\left[\frac{m}{2}\right]\left(\left[\frac{m}{2}\right]-1\right).$$

【証】 事实上，設 E_m 分解为不变平面 $E_{m_1}, \cdots, E_{m_s}$ 的直和，$m=m_1+m_2+\cdots+m_s$，我們求

$$N=\frac{m_1(m_1-1)}{2}+\cdots+\frac{m_s(m_s-1)}{2}$$

的最大值，$m_1, m_2, \cdots, m_s \geqslant 1$，$m_1+\cdots+m_s=m$．因为 $m_1 \geqslant m_2$ 时，

$$\frac{m_1(m_1-1)}{2}+\frac{m_2(m_2-1)}{2} < \frac{m_1(m_1+1)}{2}+\frac{(m_2-1)(m_2-2)}{2},$$

所以为使 N 取到最大值，則必有一个 m_a（設为 m_1）取到 $\left[\frac{m}{2}\right]$，当 m 为偶数时，最大值在 $m_1=m_2=\left[\frac{m}{2}\right]$ 时取到，当 m 为奇数

时最大値也在 $m_1=m_2=\left[\frac{m}{2}\right]$, $m_3=1$ 时取到. 在两种情形下, N 的最大値均为 $\left[\frac{m}{2}\right]\left(\left[\frac{m}{2}\right]-1\right)$.

引理 3 設 $f(k)=\left(\frac{k}{2}\right)^2+\frac{(m-k)(m-k-1)}{2}$, $m\geqslant 4$ 时, 在 $\left[\frac{m}{2}\right]+1\leqslant k\leqslant m-1$ 的范圍內, $f(k)$ 在 $k=m-1$ 时取到最大値 $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2$.

【証】 $y=f(k)=\frac{3k^2-2(2m-1)k+2m(m-1)}{4}$ 为一向上凹的抛物綫, 因此在任一区間的最大値必在端点取到, 最小値在 $k=\frac{2m-1}{3}$ 处达到, 但

$$m-1-\frac{2m-1}{3}=\frac{m-2}{3}>\frac{2m-1}{3}-\left[\frac{m}{2}\right]-1,$$

所以最大値在 $k=m-1$ 处达到, 其数値即为 $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2$.

現在証明定理 8. 先設 $n=2p$, 把 H 視为单位球面 S_{n-1} 上的运动群, 依可析的定义其迷向群为可約[1]. 如最大的不可約不变平面 E_{n-1-q} 的維数 $\leqslant\left[\frac{n-1}{2}\right]$, 則由引理 2, H 的阶数 $\leqslant\left[\frac{n-1}{2}\right]\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]-1\right)+n-1\leqslant p^2$. 如最大的不可約不变平面的維数 $n-1-q>\left[\frac{n-1}{2}\right]$, 若迷向群不分为 E_q 上旋轉群和 E_{n-q-1} 上旋轉群的直积, 則依定理 7 和引理 3 必有 H 的阶数 $<\left[\frac{n-1-q}{2}\right]^2+\frac{q(q-1)}{2}+n-1\leqslant\left(\frac{n-1-q}{2}\right)^2+\frac{q(q-1)}{2}+n-1\leqslant\left(\frac{n-2}{2}\right)^2+n-1=(p-1)^2+2p-1=p^2$. 如迷向群分为

---

[1] H 在 S_{n-1} 上未必为可迁. 在不可迁的情形, 我們仍然可以定义迷向群, 并取 S_{n-1} 上的一般位置的点来考虑, 这就是, 过这点的无穷小变换的基向量所成的陣的秩数取到最大値.

直积，如它在 E_{n-q-1} 上的誘导群 L 有交换旋轉，H 的阶数 $\leqslant\left[\frac{n-1-q}{2}\right]^2+\frac{q(q-1)}{2}+n-1\leqslant p^2$. 如 L 无交换旋轉，H 在 S_{n-1} 上可迁时由于 S_{n-1} 不是乘积空間，所以迷向群必須有不变向量，从定理 1 可見 S_{n-1} 的綫素必具(6·9·8)的形状，且当 $\sigma\neq\text{const}$ 时，$g_{i''j''}(x^{k''})dx^{i''}dx^{j''}$ 为欧氏綫素，由定理 3 可見这是不可能的. 当 H 在 S_{n-1} 上为不可迁时参照后文 § 6·11 的結果，也可見綫素具 (6·9·8) 的形状，且 $\sigma(x^a)$ 为运动不变量. 在 $n>4$ 时，因 $n-1-q>\left[\frac{n-1}{2}\right]\geqslant 2$，依定理 4 可見，群 H 本身为可約的，这和定理的假定矛盾. 当 $n=4$ 时，已知 $O(4)$ 的阶数最大的不可約子群为 4 参数的. 所以定理在 n 为偶数时成立.

再論 $n=2p+1$ 时，同样地可把 H 視为 S_{n-1} 上的运动群，其迷向群为可約，如最大不变平面 E_{n-1-q} 的維数 $\leqslant\left[\frac{n-1}{2}\right]-1=p-1$，$p\geqslant 3$ 时，参照引理 2 的証明可見，

$$H \text{ 的阶数 } \leqslant\frac{(p-1)\ (p-2)}{2}2+1+2p=p^2-p+3,$$

所以当 $p\geqslant 3$ 时 H 的阶数 $\leqslant p^2$. 在 $p=2$ 时，显然 H 的阶数 $\leqslant 4\leqslant p^2$. 如最大不变平面 E_{n-1-q} 的維数 $\geqslant\left[\frac{n-1}{2}\right]=p$，$p\geqslant 3$ 时，可和 n 为偶数的情形一样地証明迷向群不会分为 E_q 和 E_{n-1-q} 上旋轉群的直积，依定理 6，

$$H \text{ 的阶数 } \leqslant\left[\frac{2p-q}{2}\right]^2+\frac{q(q-1)}{2}+2p-1=g(q).$$

依引理 3 的証明也可見到，为了定出 $g(q)$ 在 $p\leqslant 2p-q\leqslant 2p-1$ 时的最大値，只須找出 $g(1)$, $g(2)$, $g(p)$, $g(p-1)$ 的最大値. 事实上，

$$g(1)=p^2,\quad g(2)=(p-1)^2+2p+1=p^2+1\quad (p>2),$$

p 为偶数时，

$$g(p)=\frac{3p^2+6p-4}{4},$$

$$g(p-1)=\frac{3p^2+2p}{4},$$

$p=4, 6, \cdots$ 均能使 $g(p), g(p-1)\leqslant p^2+1$. p 为奇数时,

$$g(p)=\frac{3p^2+4p-3}{4},$$

$$g(p-1)=\frac{3p^2+4p+1}{4},$$

当 $p=3, 5, \cdots$ 时,它們也都 $\leqslant p^2+1$. 先考察 $p>2, p\neq 4$ 的情形,只有在 $q=2$ 时 H 的阶数才可能取到 p^2+1,所以归到 H 的迷向群有不变平面 E_{2p-2} 和 E_2 的情形,这时迷向群的基可选为

$$C_1=\left(\begin{array}{c|c} c^a_{bn} & 0 \\ \hline 0 & c^\alpha_{\beta n}\end{array}\right),\quad C_{\rho_2}=\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & c^\alpha_{\beta\rho_2}\end{array}\right)$$

$(a, b=1, 2; \alpha, \beta=3, \cdots, 2p; \rho_2=n+1, \cdots, (p-1)^2+n+1)$, 式中 $(c^\alpha_{\beta\rho_2})$ 和 $(c^\alpha_{\beta n})$ 联合在一起,生成酉代数的实表示,这因为 $(c^\alpha_{\beta\rho_2})$ 和 $(c^\alpha_{\beta n})$ 所生成的李代数必須有交換旋轉,而且阶数为 $(p-2)^2$. $(c^\alpha_{\beta\rho_2})$ 所生成的李代数 F' 也是不可約的,否則,它必須是等价的綫性李代数联合而成,它的阶数就会 $\leqslant\frac{(p-1)(p-2)}{2}$, 这是不可能的. 此时迷向群无不变向量, H 在 S_{n-1} 上为可迁群,因而成立

$$D\omega^i=\frac{1}{2}c^i_{jk}[\omega^j, \omega^k]+\frac{1}{2}c^i_{j\rho}[\omega^j, \omega^\rho]$$

$$(i, j, k=1, 2, \cdots, n-1; \rho=n, \cdots, n+1+(p-1)^2).$$

在适当选取了 ω^ρ 之后,就有

$$c^i_{h\rho}c^h_{jk}-c^h_{j\rho}c^i_{hk}-c^h_{k\rho}c^i_{jh}=0. \qquad (6\cdot9\cdot25)$$

在此式中令 $\rho=\rho_2, i=\alpha, j=a, k=b$ 得

$$c^\alpha_{\beta\rho_2}c^\beta_{ab}=0.$$

由此就得到 $c^{a}_{ab}=0$. 又令 $\rho=\rho_2$, $i=\alpha$, $j=\beta$, $k=a$, 我們得

$$c^{\alpha}_{\gamma\rho_2}c^{\gamma}_{\beta a}-c^{\gamma}_{\beta\rho_2}c^{\alpha}_{\gamma a}=0. \qquad (6\cdot 9\cdot 26)$$

由此可見对固定的 a, $(c^{\gamma}_{\beta a})$ 和 F 中所有元素可交换, 因此为单位陣和 $(c^{\alpha}_{\beta n})$ 的綫性組合. 另一方面, 在 (6·9·25) 中令 $\rho=1$, $i=\alpha$, $j=\beta$, $k=a$, 我們得

$$c^{\alpha}_{\gamma n}c^{\gamma}_{\beta a}-c^{\gamma}_{\beta n}c^{\alpha}_{\gamma a}-c^{b}_{an}c^{\alpha}_{\beta b}=0.$$

注意到(6·9·26)就有 $c^{b}_{an}c^{\alpha}_{\beta b}=0$, 因 (c^{b}_{an}) 具形状

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

所以由此就能推出

$$c^{\alpha}_{\beta b}=0.$$

在(6·9·25)中令 $\rho=\rho_2$, $i=a$, $j=\alpha$, $k=\beta$, 我們有

$$-c^{\gamma}_{a\rho_2}c^{a}_{\gamma\beta}-c^{\gamma}_{\beta\rho_2}c^{a}_{\alpha\gamma}=0,$$

从此可見对任一 a, 反称陣 $(c^{a}_{\gamma\beta})$ 和 $c^{\gamma}_{\beta n}$ 只差一常数因子, 又令 $\rho=n$, $i=a$, $j=\alpha$, $k=\beta$ 得到

$$c^{a}_{bn}c^{b}_{\alpha\beta}-c^{\gamma}_{an}c^{a}_{\gamma\beta}-c^{\gamma}_{\beta n}c^{a}_{\alpha\gamma}=0.$$

从此就有 $c^{a}_{bn}c^{b}_{\alpha\beta}=0$, 因此得 $c^{b}_{\alpha\beta}=0$. 再在 (6·9·25) 中令 $\rho=\rho_2$, $i=a$, $j=b$, $k=\alpha$, 我們有

$$c^{\gamma}_{\alpha\rho_2}c^{a}_{\gamma b}=0.$$

从此有 $c^{a}_{\gamma b}=0$, 因而得到

$$D\omega^{a}=c^{a}_{bn}[\omega^{b},\omega^{n}],\quad D\omega^{\alpha}=c^{\alpha}_{\beta\rho}[\omega^{\beta},\omega^{\rho}],$$

所以 S_{n-1} 为乘积空間, 这是不可能的, 因而不会发生这一情况.

当 $p=2$ 时, 对 S_4 而言, 有下列两种单参数的迷向群.

(i) 迷向群的李代数元素可化为

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & k\\ 0 & 0 & -k & 0\end{pmatrix},$$

这时群为可迁．当 $k\neq\pm2,\ \pm\frac{1}{2}$ 时綫素必为欧氏的，$k=\pm2,\ \pm\frac{1}{2}$ 时，綫素分解为两个負常曲率綫素之和(見 Vrancenu[1]，讀者也可直接用我們所一直使用的方法直接做出这一結果)，因此这是不可能的．

(ii) 迷向群为 $O(1)\times O(1)\times O(2)$．若 H 在 S_4 上为可迁，則依 § 36 得出 S_{n-1} 的綫素，它共有四种

$$ds^2=d\sigma_1^2+d\sigma_2^2 \quad (d\sigma_1^2,\ d\sigma_2^2 \text{ 各为二維常曲率的綫素}),$$

$$ds^2=d\sigma_1^2+e^{-2kx^1}[(dx^3)^2+(dx^4)^2],$$

$$ds^2=(dx^1)^2+\left[dx^2+A\frac{x^3\,dx^4-x^4\,dx^3}{1+\frac{K}{4}[(x^3)^2+(x^4)^2]}\right]^2+\frac{(dx^3)^2+(dx^4)^2}{\left\{1+\frac{K}{4}[(x^3)^2+(x^4)^2]\right\}^2},$$

$$ds^2=(dx^1)^2+e^{-4kx^1}[dx^2+A(x^3\,dx^4-x^4\,dx^3)]^2+e^{-2kx^1}[(dx^3)^2+(dx^4)^2].$$

第一和第三种綫素是乘积空間的綫素，因此是不可能的，第二第四种綫素属于形状(6·9·8)，但因其中有 $e^{-2kx^1}[(dx^3)^2+(dx^4)^2]$ 項，所以这也是不可能发生．如果 H 在 S_4 上不可迁，則 H 的階数 $\leqslant 3+1=4$．

又当 $p=4,\ q=4$ 时，也有 $\left[\frac{2p-q}{2}\right]^2+\frac{q(q-1)}{2}+2p-1=p^2+1$，这时应該对应一个 $O(8)$ 的可約子群，它有一 4 維的最大不可約平面，而階数应等于 9，且迷向群不分为直积．这迷向群只能是定理 6 的証明中 $n=8$ 时所出現的情形(ii)．但依定理 6 可見，S_8 的綫素会成为欧氏的，这是不可能的．因而，H 的階数应該 $<p^2+1$，这便是所要証的事实．

这样，我們便在一切的情形下，証明了定理的論断．

从这个定理与定理 2 就能推出

推論 非常曲率空間的运动群如迷向群为不可約，则群的参数个数 $\leqslant \left[\frac{n}{2}\right]^2+n$.

§6·10 齐性 Riemann 空間完全运动群的参数个数. 空隙性

在 §6·2 中已提到，常曲率空間（包括欧氏空間）容許最大参数运动群，参数为 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个，記 r 为 Riemann 空間 V_n 的完全运动群的参数个数，王宪钟[1] 首先得出了当 $n\neq 4$ 时，

$$\frac{n(n-1)}{2}+1<r<\frac{n(n+1)}{2} \quad (n\neq 4) \qquad (6\cdot 10\cdot 1)$$

不可能发生，这称为运动群的第一空隙性. 它大大改善了 Fubini 的古典結果（特别是在 n 較大时），后来 Егоров[1]，矢野[2]等人继續研究这一問題，矢野得出运动群阶数为 $\frac{n(n-1)}{2}+1$ 时的 **Riemann** 空間的綫素形式，Егоров 得出完全运动群的第二空隙是1)

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+3<r<\frac{1}{2}n(n-1)+1. \qquad (6\cdot 10\cdot 2)$$

在本节中我們要給出依次得到齐性 Riemann 空間完全运动群的空隙的方法，并在 n 有适当限制时，确定了最初八个空隙，并定出完全运动群取得最大的 15 个阶数（参数个数）时所对应的 Riemann 空間的綫素. 这些結果，我們将用一表列在本节

1) Егоров 是在 Riemann 空間（不限于正定）不是 Einstein 空間的假定下得到这个空隙的，在后文中，我們可看到对正定 Riemann 空間这个假定并不需要. 若桑[1]在 $n>243$ 的假定下，得到运动群的第二空隙是(6·10·2)。

最后,依据这里的方法空隙可逐个的确定下去(見胡和生[6]).

这里討論的是完全运动群的空隙,因为这样已可把运动群参数个数較多的齐性 Riemann 空間无遺漏地决定出来.在决定了完全运动群的空隙之后,如要研究一切运动群的空隙,所需要做的事情基本上就是决定直交群和拟直交群(負慣性指数为1)的子群的空隙性,这是一个純代数問題.同时指出,已知容許可迁运动群 G_r 的 Riemann 空間 V_n,要驗証 G_r 为 V_n 的完全运动群,也往往需要克服一定的困难.

下面我們先利用 § 6·9 中的結果得出定理 1,2,定理 2 給出了完全运动群所不能取到的一部分阶数.我們又給出了有关混合运动的定理 3,它对确定完全运动群空隙时是很有用处的.接着我們开始逐个确定第一到第八空隙.

附带指出,当我們写出一种綫素时,实际上还可对它乘上一个常数因子,但我們总是不再指明这一点.

我們先証明

定理 1 設 $V_n(n>2)$ 为非常曲率的齐性 Riemann 空間,其完全运动群的阶数 $>\left[\frac{n}{2}\right]^2+n$;那末迷向群 H 必具形状

$$H=G(q)\times O(n-q),$$

于此 $G(q)$ 为 $O(q)$ 或其子群,又 $q\leqslant\frac{n}{2}$.

【証】 依据前节定理 2, 8, V_n 的迷向群必为可約的,因为这时迷向群的阶数 $>\left[\frac{n}{2}\right]^2$. 設維数最大的不可約不变平面的維数为 m,分两种情形考虑.

(i) $m>\left[\frac{n}{2}\right]$. 这时必有

$$\left[\frac{n}{2}\right]^2\geqslant\left[\frac{m}{2}\right]^2+\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}.$$

这是因为，此不等式右边$\leqslant\left(\frac{m}{2}\right)^2+\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}$，而由前节引理 3，在$\left[\frac{n}{2}\right]<m\leqslant n-1$时，$\left(\frac{m}{2}\right)^2+\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}$，在$m=n-1$时取到最大值$\frac{n^2-2n+1}{2}$．它的确$\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]^2$．因此根据前节定理 7，迷向群分为直积 $G_1(q)\times G_2(n-q)$ $(n-q=m)$，于此 $G_2(n-q)$ 或 $O(n-q)$或其不可約子群．

(ii) $m\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$．設各不可約不变平面的維数为$m_1, m_2, \cdots, m_s$，則 $m_1, m_2, \cdots, m_s\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$，$m_1+m_2+\cdots+m_s=n$．迷向群的阶数$\leqslant N=\frac{m_1(m_1-1)}{2}+\cdots+\frac{m_s(m_s-1)}{2}$．由上节引理 2 可知，当 n 为偶数 $2p$，$s=2$，$m_1=m_2=p$ 时，N 取到最大值

$$\frac{p(p-1)}{2}+\frac{p(p-1)}{2}=p^2-p<p^2.$$

当 n 为奇数 $2p+1$ 时，N 的最大值由 $s=3$，$m_1=m_2=p$，$m_3=1$ 取到，这个最大值仍小于 p^2．因此(ii)是不可能发生的．

从而迷向群为直积 $G_1(q)\times G_2(n-q)$．如 $G_1(q)$ 无不变向量，我們应用若桑的定理(§ 6·4)可知 V_n 为乘积空間

$$ds^2=ds_1^2+ds_2^2, \tag{6·10·3}$$

于此 ds_1^2 是迷向群为 $G_1(q)$的 q 維齐性 Riemann 空間的綫素，ds_2^2 是迷向群为 $G_2(n-q)$的齐性 Riemann 空間的綫素．如 ds_2^2 不是常曲率的，則 ds_2^2 的迷向群阶数$\leqslant\left[\frac{n-q}{2}\right]^2$，此为不可能，所以 ds_2^2 必須为常曲率的，由于我們所討論的是完全运动群，因而

$$G_2(n-q)=O(n-q).$$

当 $G_1(q)$有不变向量时，如 $G_2(n-q)$有交換旋轉，則 $n-q$ 为偶数，$G_2(n-q)$的阶数$\leqslant\left(\frac{n-q}{2}\right)^2$，此为不可能，既然 $G_2(n$

$-q$) 无变换旋轉，我們可以利用上节定理 1 得到空間的綫素必为(6·10·3)或

$$ds^2=ds_1^2+e^{-2kx^1}\sum_{\alpha=q+1}^{n}(dx^\alpha)^2, \qquad (6\cdot10\cdot4)$$

这里的 ds_1^2 为以 $G_1(q)$ 为迷向群的 q 維齐性 Riemann 空間的綫素，且运动群的方程包含有

$$\bar{x}^1=x^1+c^1,$$

而所論的是完全运动群，因而也必須有 $G_2(n-q)=O(n-q)$. 定理証毕.

在定理 1 的証明中，也給出了空間的綫素形式.

根据上述定理，就可以知道，n 維齐性 Riemann 空間的完全运动群的迷向群的阶数如大于 $\left[\frac{n}{2}\right]^2$，則必有一 $n-q$ 維不变平面 E_{n-q}，且迷向群在其上的誘导为 $O(n-q)$，迷向群又分为直积，在 E_{n-q} 的互补平面 E_q 上誘导群的阶数在 0 和 $\frac{q(q-1)}{2}$ 之間.

从此就得出

定理 2 齐性 Riemann 空間的完全运动群的阶数 r 不能采取下述数值:

$$\frac{(n-q-1)(n-q-2)}{2}+\frac{q(q+1)}{2}+n$$
$$<r<\frac{(n-q)(n-q-1)}{2}+n, \qquad (6\cdot10\cdot5)$$

式中 q 要满足

$$\frac{(n-q-1)(n-q-2)}{2}+\frac{q(q+1)}{2}>\left[\frac{n}{2}\right]^2. \quad (6\cdot10\cdot6)$$

并且又要使(6·10·5)有意义.

利用这个定理可以得出完全运动群的阶数不能采取的許多

数值，但为了确切地依次得到每一空隙，则还需做进一步的工作，为此，需要研究 ds_1^2 的运动群，討論有关的綫素 (6·10·3)，(6·10·4)是否有混合运动等等．

为了肯定某些綫素的完全运动群的阶数，我們要証

定理 3　設半可約的 Riemann 空間 V_n 的綫素为

$$ds^2=ds_1^2+e^{-x^1}ds_2^2, \tag{6·10·7}$$

式中

$$ds_1^2=(dx^1)^2+e^{-kx^1}\sum_{a=2}^{q}(dx^a)^2,\quad ds_2^2=\sum_{\alpha=q+1}^{n}(dx^\alpha)^2, \tag{6·10·8}$$

如果 $k\neq 0,\ 1$，则空間无单参数混合运动，又 $k=0,\ 1$ 时确有混合运动．

【証】　設 ξ^i 为空間的一个 Killing 向量，写出 Killing 方程，其中包括

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial x^\alpha}+e^{-x^1}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^1}=0, \tag{6·10·9}$$

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial x^a}+e^{-kx^1}\frac{\partial\xi^a}{\partial x^1}=0, \tag{6·10·10}$$

$$e^{(-k+1)x^1}\frac{\partial\xi^a}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^a}=0, \tag{6·10·11}$$

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1}=0, \tag{6·10·12}$$

$$k\xi^1=2\frac{\partial\xi^a}{\partial x^a},\quad \xi^1=2\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\alpha}\quad (a,\ \alpha\ \text{不是作和}). \tag{6·10·13}$$

把(6·10·9)关于 x^1 微分，利用(6·10·12)式得

$$-\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^1}+\frac{\partial^2\xi^\alpha}{(\partial x^1)^2}=0,$$

从此得

$$\xi^\alpha=e^{x^1}A^\alpha(x^a,\ x^\beta)+B^\alpha(x^a,\ x^\beta)$$

$$(\alpha,\ \beta=q+1,\ \cdots,\ n;\ a=2,\ \cdots,\ q). \tag{6·10·14}$$

把(6·10·10)关于x^1微分，利用(6·10·12)式得

$$-k\frac{\partial\xi^a}{\partial x^1}+\frac{\partial^2\xi^a}{(\partial x^1)^2}=0,$$

从此得

$$\xi^a=e^{kx^1}C^a(x^b,\ x^\alpha)+D^a(x^b,\ x^\alpha)$$
$$(a,\ b=2,\ \cdots,\ q). \tag{6·10·15}$$

又从(6·10·9)关于x^a微分，(6·10·10)关于x^α微分，消去$\frac{\partial^2\xi^1}{\partial x^a\partial x^\alpha}$，得到

$$e^{-x^1}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^a}\right)=e^{-kx^1}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial\xi^a}{\partial x^\alpha}\right),$$

用(6·10·11)把$\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^a}$消去，得

$$-e^{-kx^1}\frac{\partial^2\xi^a}{\partial x^1\partial x^\alpha}-(1-k)e^{-kx^1}\frac{\partial\xi^a}{\partial x^\alpha}=e^{-kx^1}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial\xi^a}{\partial x^\alpha}\right),$$

或

$$2\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial\xi^a}{\partial x^\alpha}\right)=(k-1)\frac{\partial\xi^a}{\partial x^\alpha},$$

所以

$$\frac{\partial\xi^a}{\partial x^\alpha}=e^{\frac{k-1}{2}x^1}E^a_\alpha(x^b,\ x^\beta). \tag{6·10·16}$$

同样可得

$$\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^a}=e^{-\frac{k-1}{2}x^1}H^\alpha_a(x^b,\ x^\beta). \tag{6·10·17}$$

从(6·10·15)，(6·10·16)式得

$$e^{kx^1}\frac{\partial C^a}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial D^a}{\partial x^\alpha}=e^{\frac{k-1}{2}x^1}E^a_\alpha.$$

从此可見，如$k\neq\pm1$，則$E^a_\alpha=0$. 又$k=-1$时，应有$\frac{\partial D^a}{\partial x^\alpha}=0$，从(6·10·14)，(6·10·17)式可見

$$e^{x^1}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^a}+\frac{\partial B^\alpha}{\partial x^a}=e^{-\frac{k-1}{2}x^1}H_a^\alpha.$$

从此可見,如 $k\neq\pm1$, 則 $H_a^\alpha=0$. 又 $k=-1$ 时, 应有 $\frac{\partial B^\alpha}{\partial x^a}=0$, 所以在 $k\neq\pm1$ 时,

$$\frac{\partial\xi^a}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^a}=0.$$

当 $k\neq\pm1,0$ 时, 由上式及(6·10·12), (6·10·13)式可得 ξ^1 = 常数, 再从(6·10·9), (6·10·10)得到 $\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^1}=0$, $\frac{\partial\xi^a}{\partial x^1}=0$, 因而 ξ^α 单为 x^β 的函数, ξ^a 单为 x^b 的函数, 运动是非混合的.

在 $k=-1$ 时, 从(6·10·13)式,

$$\frac{\partial\xi^a}{\partial x^a}=-\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\alpha},$$

即

$$e^{-x^1}\frac{\partial C^a}{\partial x^a}+\frac{\partial D^a}{\partial x^a}=-e^{x^1}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial B^\alpha}{\partial x^\alpha}\quad(\alpha\text{ 不是作和}),$$

可見

$$\frac{\partial C^a}{\partial x^a}=0,\quad\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha}=0,\quad\frac{\partial D^a}{\partial x^a}=-\frac{\partial B^\alpha}{\partial x^\alpha}=\text{常数}.$$

所以 ξ^1 = 常数, 由此得 $\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^1}=0$, $\frac{\partial\xi^a}{\partial x^1}=0$. 由 (6·10·14) 及 (6·10·15) 可見

$$\xi^\alpha=B^\alpha(x^\beta),\quad\xi^a=D^a(x^b),$$

故 ξ^i 为非混合的.

当 $k=1$ 时, 空間是負常曲率的, 故有混合运动; 又 $k=0$ 时, 空間也有混合运动, 因为这时綫素还可写为

$$ds^2=(dx^2)^2+\cdots+(dx^q)^2$$
$$+[(dx^1)^2+e^{-x^1}\{(dx^{q+1})^2+\cdots+(dx^n)^2\}].$$

定理証毕.

現在依次列出空隙来，为方便計，我們用 $d\sigma_q^2$ 記 q 維常曲率綫素.

(i) $q=0$，当 $n>4$ 时 (6·10·6) 能满足，我們得熟知的完全运动群的第一空隙，即 r 不能满足

$$\frac{n(n-1)}{2}+1<r<\frac{n(n+1)}{2}.$$

而当 $r=R_2=\frac{n(n-1)}{2}+1$ 时，相应的綫素应为

$$ds^2=(dx^1)^2+d\sigma_{n-1}^2, \qquad (6\cdot10\cdot18)$$

或

$$ds^2=(dx^1)^2+e^{-2kx^1}\sum_{\alpha=2}^{n}(dx^\alpha)^2. \qquad (6\cdot10\cdot19)$$

显然 (6·10·18)，(6·10·19) 容許 $\frac{n(n-1)}{2}+1$ 阶的非混合的运动群，又 (6·10·18) 式中当 $d\sigma_{n-1}^2$ 不是欧氏时，它的完全运动群阶数为 R_2，这是因为非欧氏的 $d\sigma_{n-1}^2$ 不容許絕对平行向量場，因而(6·10·18)不容許單参数混合运动的緣故.

綫素(6·10·19)为常曲率空間的綫素，其完全运动群的阶数 $R_1=\frac{n(n+1)}{2}$.

(ii) $q=1$，当 $n>8$ 时，(6·10·6)能够满足，我們得完全运动群的第二空隙是 r 不能满足

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+3<r<\frac{1}{2}n(n-1)+1.$$

完全运动群阶数为 $r=R_3=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+3$ 时，迷向群必須是 $O(2)\times O(n-2)$，相应的綫素为

$$ds^2=d\sigma_2^2+d\sigma_{n-2}^2. \qquad (6\cdot10\cdot20)$$

当且仅当 $d\sigma_2^2$，$d\sigma_{n-2}^2$ 不全是欧氏綫素时，它們之中至少有一个不容有絕对平行向量場，因此空間 V_n 不容許混合的单参数运动

群,所以它的完全运动群的阶数确是 R_3.

再令 $r=R_4=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2$, 这时迷向群为 $O(1)\times O(1)\times O(n-2)$, 相应的綫素必須是

$$ds^2=ds_1^2+d\sigma_{n-2}^2, \qquad (6\cdot10\cdot21)$$

或

$$ds^2=ds_1^2+e^{-2kx^1}\sum_{\alpha=3}^{n}(dx^\alpha)^2. \qquad (6\cdot10\cdot22)$$

但 ds_1^2 是容許单純可迁群的 2 維 Riemann 空間的綫素, 因此它是 2 維負常曲率空間,綫素(6·10·21)归入綫素(6·10·20),而綫素(6·10·22)除一常数因子外还可写为

$$ds^2=(dx^1)^2+e^{-2x^1}(dx^2)^2+e^{-2kx^1}\sum_{\alpha=3}^{n}(dx^\alpha)^2. \quad (6\cdot10\cdot23)$$

依定理 3 可見,当 $k\neq0,1$ 时,它的完全运动群确为 R_4,且在 $n>8$ 时,成立 $R_4>\left[\frac{n}{2}\right]^2+n$.

(iii) $q=2$, (6·10·6)在 $n>10$ 时成立, 我們得第三空隙

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2}+6<r<\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2.$$

这时可細分为

1) 令 $R_5=\frac{(n-2)(n-3)}{2}+6$, 相应的迷向群为 $O(3)\times O(n-3)$, 以 R_5 为完全运动群的綫素为

$$ds^2=d\sigma_3^2+d\sigma_{n-3}^2, \qquad (6\cdot10\cdot24)$$

式中 $d\sigma_3^2$, $d\sigma_{n-3}^2$ 不全是欧氏的.

2) $O(3)$ 的最大子群为 $O(1)\times O(2)$, 相应的迷向群为 $O(n-3)\times O(2)\times O(1)$, 令 $R_6=\frac{(n-2)(n-3)}{2}+4$, 完全运动群参数为 R_6 的綫素必須是

$$ds^2=ds_1^2+d\sigma_{n-3}^2, \qquad (6\cdot10\cdot25)$$

$$ds^2=ds_1^2+e^{-2x^1}\sum_{\alpha=4}^{n}(dx^\alpha)^2, \qquad (6\cdot10\cdot26)$$

这里 ds_1^2 是齐性 Riemann 空間 V_3 的綫素，且 V_3 的迷向群为 $O(1)\times O(2)$，并且 (6·10·26) 中 ds_1^2 的运动群方程中包含 $\bar{x}^1=x^1+c$，因而上述綫素又可更具体的分为下列五种形式[1]：

a) $ds^2=(dx^1)^2+d\sigma_2^2+d\sigma_{n-3}^2, \qquad (6\cdot10\cdot27)$

b) $ds^2=(dx^1)^2+e^{-2kx^1}\sum_{a=2}^{3}(dx^a)^2+d\sigma_{n-3}^2,$

c) $ds^2=(dx^1)^2+d\sigma_2^2+e^{-2x^1}\sum_{\alpha}(dx^\alpha)^2,$

d) $ds^2=(dx^1)^2+e^{-2kx^1}\sum_{a}(dx^a)^2+e^{-2x^1}\sum_{\alpha}(dx^\alpha)^2, \qquad (6\cdot10\cdot28)$

e) $ds^2=ds_1^2+d\sigma_{n-3}^2, \qquad (6\cdot10\cdot29)$

$$ds_1^2=\left\{dx^1+A\frac{x^2\,dx^3-x^3\,dx^2}{1+\frac{K}{4}[(x^2)^2+(x^3)^2]}\right\}^2+\frac{(dx^2)^2+(dx^3)^2}{\left\{1+\frac{K}{4}[(x^2)^2+(x^3)^2]\right\}^2}$$

$$(a,\ b,\ c=2,\ 3;\ \alpha=4,\ \cdots,\ n;\ A,\ K\ \text{常数},\ A\neq0).$$

我們注意到綫素 b) 中 $(dx^1)^2+e^{-2kx^1}\sum(dx^a)^2$ 是 3 維負常曲率空間的綫素，因而 b) 具形式(6·10·24)，这里的迷向群相应的运动群不是完全运动群．对于綫素 d)，由定理 3 可知 $k\neq0,1$ 时，完全运动群的阶数为 R_6，$k=0$，1 时，这里的迷向群相应的不是完全运动群．

我們又注意到綫素 a) 中 $d\sigma_2^2$ 与 $d\sigma_{n-2}^2$ 均不是欧氏时，綫素 a) 不能容許混合运动，因而它的完全运动群的阶数为 R_6．但当它們之中至少有一个綫素为欧氏时，它容有混合运动，完全运动群

[1] 由于 e) 中的 ds_1^2 的运动群不包含方程 $\bar{x}^1=x^1+c^1$，故不能利用它构成綫素 (6·10·26)．

的阶数 $>R_6$. 此外綫素 c) 中 $(dx^1)^2+e^{-2x^1}\sum_{\alpha}(dx^\alpha)^2$ 为 $n-2$ 維負常曲率綫素，c) 归入到 (6·10·20)，这里迷向群所对应的不是完全运动群.

綫素 e) 是分为直积的，ds_1^2 的完全运动群为 G_4，$d\sigma_{n-3}^2$ 的完全运动群的阶数为 $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$，这时如有混合运动，則 ds_1^2 必有絕对平行向量場，其中的向量在 G_4 的迷向群变换之后仍应属于一个絕对平行向量場. 設 V 为絕对平行向量場的一个向量，如 V 即为迷向群的不变向量，則 ds_1^2 必为 $(dx^1)^2+g_{ab}(x^c)dx^a dx^b$ $(a, b, c=2, 3)$ 的形状，这和 ds_1^2 的表达式矛盾. 如 V 不是不变向量，則这 3 維的 Riemann 空間至少有两个独立的平行向量場，ds_1^2 为欧氏的，这也是不可能的. 因此空間不容許混合运动，所以具綫素 e) 的 Riemann 空間完全运动群阶数为 R_6.

因而完全运动群阶数为 $\frac{(n-2)(n-3)}{2}+4$ 的 Riemann 空間 V_n $(n>10)$ 为 $V_n=E_1\times S_2\times S_{n-3}$ $(S_2\neq E_2,\ S_{n-3}\neq E_{n-3})$ 或其綫素为 (6·10·28)，但 $k\neq 0, 1$，或 (6·10·29)，反之亦成立.

由于 $R_6-R_5=2$，所以当 $n>10$ 时出現了第四空隙

$$r\neq\frac{(n-2)(n-3)}{2}+5.$$

3) 迷向群为 $O(1)\times O(1)\times O(1)\times O(n-3)$ 的情形，令 $R_7=\frac{(n-2)(n-3)}{2}+3$，这时迷向群有 3 个独立的不变向量，$V_n$ 的綫素必可化为

a) $$ds^2=ds_1^2+d\sigma_{n-3}^2, \qquad (6\cdot10\cdot30)$$

这里 ds_1^2 容許单純可迁运动群，或

b) $$ds^2=ds_1^2+e^{-2x^1}\sum_{\alpha=4}^{n}(dx^\alpha)^2, \qquad (6\cdot10\cdot31)$$

这里 ds_1^2 容許单純可迁群，且包含方程 $\bar{x}^1=x^1+c$.

当 (6·10·30), (6·10·31) 中的 3 維群空間的完全运动群就是 G_3，且这些綫素不容許混合运动时，完全运动群的阶数确为 R_7.

我們不去一一分析这些群空間，但这样的空間是存在的，例如对綫素为

$$ds_1^2=(dx^1)^2+e^{-2kx^1}(dx^2)^2+e^{-2x^1}(dx^3)^2$$

的 3 維群空間就可利用它和非欧氏的 $d\sigma_{n-3}^2$ 构成綫素(6·10·30)，它的完全运动群的参数个数就是 R_7.

这里我們还注意到，虽然在 $n=11$ 时，$\frac{(n-2)(n-3)}{2}+3>\left[\frac{n}{2}\right]^2+n$，但在 $n=12$ 时，却有 $\frac{(n-2)(n-3)}{2}+3=\left[\frac{n}{2}\right]^2+n=48$，在 $n>12$ 时，容許 $\frac{(n-2)(n-3)}{2}+3$ 参数的完全运动群的 Riemann 空間全部归入于情形 3).

再继續考察第五到第八空隙，

(iv) $n>12$, $q=3$ 时，(6·10·6) 能满足，出現第五空隙，即 r 不能满足不等式

$$\frac{(n-3)(n-4)}{2}+10<r<\frac{(n-2)(n-3)}{2}+3.$$

依 $O(4)$ 的子群可再考察

1) 迷向群为 $O(4)\times O(n-4)$，令 $R_8=\frac{(n-3)(n-4)}{2}+10$，相应的綫素为

$$ds^2=d\sigma_4^2+d\sigma_{n-4}^2, \tag{6·10·32}$$

因而 $V_n(n>12)$ 的完全运动群为 R_8 的充要条件是 $V_n=S_4\times S_{n-4}$，但 S_4, S_{n-4} 不全是欧氏的.

2) 迷向群为 $N(4)\times O(n-4)$，这里 $N(4)$ 为 $O(4)$ 的最大不可約子群，这时綫素应分为直积

$$ds^2 = ds_1^2 + d\sigma_{n-4}^2, \tag{6·10·33}$$

式中 ds_1^2 为以 $N(4)$ 为迷向群的 Riemann 空間的綫素, 这种 V_4 的迷向群的李代数由

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

和它的可换的反称陣生成. 利用 Jacobi 恒等式, 經过直接 (但有些繁复的) 計算后, 就能得到: 对 V_4 的运动群 G_8 而言, 可选适当的微分算子 X_a, X_λ ($a=1, 2, 3, 4$; $\lambda=5, 6, 7, 8$) 使有

$$c_{ab}^{e}=0, \quad c_{ab}^{\lambda}=0, \quad c_{a\mu}^{\lambda}=0, \quad c_{\lambda\mu}^{c}=0,$$

且 X_λ 属于一点的安定群. 因此 V_4 就是欧氏的 E_4[1], 綫素 (6·10·33) 就归入到 (6·10·32) 去.

3) 迷向群为 $O(1)\times O(3)\times O(n-4)$, 依 §6·9 定理 1 与 §6·5 的結果可知, 可能的綫素为

$$\text{a)}\ ds^2 = (dx^1)^2 + d\sigma_3^2 + d\sigma_{n-4}^2, \tag{6·10·34}$$

$$\text{b)}\ ds^2 = (dx^1)^2 + e^{-2kx^1}\sum_{a=2}^{4}(dx^a)^2 + d\sigma_{n-4}^2,$$

$$\text{c)}\ ds^2 = (dx^1)^2 + d\sigma_3^2 + e^{-2x^1}\sum_{\alpha=5}^{n}(dx^\alpha)^2,$$

$$\text{d)}\ ds^2 = (dx^1)^2 + e^{-2kx^1}\sum_{a=2}^{4}(dx^a)^2 + e^{-2x^1}\sum_{\alpha=5}^{n}(dx^\alpha)^2, \tag{6·10·35}$$

和 (iii) 情形 2 一样地分析可知, $V_n(n>14)$ 的完全运动群的阶数为 $R_9=\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}+7$ 的充要条件是 V_n 的綫素为 (6·10·34) 或 (6·10·35), 但 (6·10·34) 中 $d\sigma_3^2, d\sigma_{n-4}^2$ 都不是欧氏的, (6·10·35) 中 $k\neq 0, 1$.

4) 迷向群为 $N'(4)\times O(n-4)$, $N'(4)$ 为 $O(4)$ 的 3 阶的不

[1] 在 Vranceanu[1] 中只指出 V_4 是对称空間.

可約子群，这时 V_n 綫素应为

$$ds^2 = ds_1^2 + d\sigma_{n-4}^2.$$

ds_1^2 是迷向群为 $N'(4)$ 的齐性 Riemann 空間 V_4，已知 V_4 应为欧氏空間．这种綫素前面已出現过，因而这里出現的运动群不是完全运动群．

5）迷向群为 $O(2)\times O(2)\times O(n-4)$，对应的綫素为

$$ds^2 = d\sigma_2^2 + d\sigma_2^2 + d\sigma_{n-4}^2. \qquad (6\cdot10\cdot36)$$

当式中出現的三个綫素至少有两个不是欧氏时，它的完全运动群的阶数为 $R_{10} = \dfrac{(n-3)(n-4)}{2} + 6$，当 $n > 14$ 时，

$$R_{10} > \left[\frac{n}{2}\right]^2 + n.$$

6）迷向群有正交的不可約不变平面 E_2, E_2, E_{n-4}，但在 $E_2 \dot{+} E_2$ 上只誘导出单参数的旋轉群，这时相应的綫素为

$$ds^2 = ds_1^2 + d\sigma_{n-4}^2.$$

ds_1^2 只有 1 阶的迷向群又无不变向量，且迷向群不分为直积，如前章所注明的，ds_1^2 是欧氏綫素或是綫素[1)]

$$ds^2 = 4e^{-2x^3}(dx^1 + x^2dx^4 - x^4dx^2)^2$$
$$+ e^{2x^3}(dx^2)^2 + (dx^3)^2 + 4e^{-4x^3}(dx^4)^2.$$

7）迷向群为 $O(1)\times O(1)\times O(2)\times O(n-4)$，相应綫素为

$$ds^2 = ds_1^2 + d\sigma_{n-4}^2, \qquad (6\cdot10\cdot37)$$

$$ds^2 = ds_1^2 + e^{-2x^1}\sum_{\alpha=4}^{n}(dx^\alpha)^2. \qquad (6\cdot10\cdot38)$$

这里 ds_1^2 为迷向群有 2 个不变向量場的 4 維齐性 Riemann 空間，可依 § 6·6 中的方法写出，其結果是

a）$ds_1^2 = (dx^1)^2 + e^{-2kx^1}(dx^2)^2 + d\sigma_2^2$,

b）$ds_1^2 = (dx^1)^2 + e^{-2kx^1}(dx^2)^2 + e^{-2k'x^1}[(dx^3)^2 + (dx^4)^2]$,

---

1) 这个綫素是張国樑同学計算出来的，是对 Vranceanu[1] 的一个修正．

c) $ds_1^2=(dx^1)^2+\left\{dx^2+A\dfrac{x^3dx^4-x^4dx^3}{1+\dfrac{K}{4}[(x^3)^2+(x^4)^2]}\right\}^2$

$$+\frac{(dx^3)^2+(dx^4)^2}{\left\{1+\dfrac{K}{4}[(x^3)^2+(x^4)^2]\right\}^2}\quad (A\neq 0),$$

d) $ds_1^2=(dx^1)^2+e^{-4x^1}(dx^2+x^3dx^4-x^4dx^3)^2$

$$+Ae^{-2x^1}[(dx^3)^2+(dx^4)^2]\quad (A\neq 0),$$

其中有一部分綫素（为节省篇幅計，不一一进行驗証）的完全运动群的阶数 $R_{11}=\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}+5$．当 $n>14$ 时，

$$R_{11}>\left[\frac{n}{2}\right]^2+n.$$

8）迷向群为 $O(1)\times O(1)\times O(1)\times O(1)\times O(n-4)$．相应的綫素为

$$ds^2=ds_1^2+d\sigma_{n-4}^2,\tag{6·10·39}$$

$$ds^2=ds_1^2+e^{-2x^1}\sum_{\alpha=5}^{n}(dx^\alpha)^2,\tag{6·10·40}$$

这里的 ds_1^2 是容許 4 参数单純可迁群的 Riemann 空間的綫素，在(6·10·40)中还要求运动群的方程中包含 $\bar{x}^1=x^1+c^1$．当这些群空間不容許更大的运动群且綫素无混合运动时，它們所容有的最大运动群的阶数为 $R_{12}=\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}+4$．当 $n>14$ 时，$R_{12}\geqslant\left[\dfrac{n}{2}\right]^2+n$．

从这个分析可見，完全运动群的第六空隙为 $n>14$ 时阶数 $r\neq\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}+9$．

(v) 最后，取 $n>14$, $q=4$ 能滿足(6·10·5)，从此得到完全运动群第七空隙为 r 不能滿足

$$\frac{(n-4)(n-5)}{2}+15<r<\frac{(n-3)(n-4)}{2}+4.$$

但在 $n=15$ 时，$\frac{(n-4)(n-5)}{2}+15=\frac{(n-3)(n-4)}{2}+4=70$. 所以这个空隙实际上是在 $n>15$ 时出現. 依以前的方法可陆續得出有关的空間和后面的空隙，例如当迷向群为 $O(5)\times O(n-5)$ 时，有关的綫素为

$$ds^2=d\sigma_5^2+d\sigma_{n-5}^2. \tag{6·10·41}$$

如 $d\sigma_5^2$ 和 $d\sigma_{n-5}^2$ 都不是欧氏时，它所容有的完全运动群的阶数

$$=R_{13}=\frac{(n-4)(n-5)}{2}+15.$$

次一迷向群为 $O(1)\times O(4)\times O(n-5)$，相应的綫素为

$$ds^2=(dx^1)^2+d\sigma_4^2+d\sigma_{n-5}^2, \tag{6·10·42}$$

$$ds^2=(dx^1)^2+e^{-2kx^1}\sum_{a=2}^{5}(dx^a)^2+d\sigma_{n-5}^2,$$

$$ds^2=(dx^1)^2+d\sigma_4^2+e^{-2x^1}\sum(dx^\alpha)^2,$$

$$ds^2=(dx^1)^2+e^{-2kx^1}\sum_{a=2}^{5}(dx^a)^2+e^{-2x^1}\sum_{\alpha=6}^{n}(dx^\alpha)^2. \tag{6·10·43}$$

$n>16$ 时，我們有 $R_{14}=\frac{(n-4)(n-5)}{2}+11>\left[\frac{n}{2}\right]^2+n$，因此得 Riemann 空間 $V_n(n>16)$ 的完全运动群阶数为 R_{14} 的充要条件是 $V_n=E_1\times S_4\times S_{n-5}$($S_4$, S_{n-5} 都不是欧氏空間) 或綫素为 (6·10·43)形式的 Riemann 空間，其中 $k\neq 0, 1$.

到此我們已决定了第八个空隙，即 r 不能满足

$$\frac{(n-4)(n-5)}{2}+11<r<\frac{(n-4)(n-5)}{2}+15 \quad (n>16).$$

到此，我們已决定了八个空隙和一切的有关綫素.

現把这八个空隙及有关綫素列表于后，为方便計，我們引入下列記号：

$S_n(k<0)$ 为 n 維負常曲率空間，S_n 为 n 維常曲率空間.

$$P_n=E_1\times S_{n-1}.$$

g_n 是完全运动群为 n 参数的 n 維群空間.

齐性 Riemann 空間或其綫素	完全运动群的阶数	空隙
1. S_n	$\frac{n(n+1)}{2}$	第一空隙
2. $P_n=S_{n-1}\times E_1$ S_{n-1} 不是欧氏的	$\frac{n(n-1)}{2}+1 \quad (n>4)$	
3. $S_{n-2}\times S_2$ S_{n-2}, S_2 中至少有一个不是欧氏的	$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+3 \quad (n>8)$	第二空隙
4. 由 $S_2(k<0)$ 与 E_{n-2} 构成的一类半可約空間，綫素为 $ds^2=(dx^1)^2+e^{-2cx^1}(dx^2)^2+e^{-2x^1}\sum_{\alpha=3}^{n}(dx^\alpha)^2$ （c 常数，$c\neq 0, 1$）	$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2 \quad (n>8)$	第三空隙
5. $S_{n-3}\times S_3$ S_{n-3}, S_3 中至少有一个不是欧氏的	$\frac{(n-2)(n-3)}{2}+6 \quad (n>10)$	
6. a. $S_{n-3}\times P_3=S_{n-2}\times S_2\times E_1$ S_{n-3}, S_2 都不是欧氏的 b. 由 $S_{n-2}(k<0)$ 与 E_2 构成的一类半可約空間，綫素为 $ds^2=(dx^1)^2+e^{-2cx^1}\sum_{\alpha=2}^{3}(dx^\alpha)^2+e^{-2x^1}\sum_{\alpha=4}^{n}(dx^\alpha)^2 \quad (c\neq 0, 1)$ c. $V_3\times S_{n-3}$，其中 V_3 的綫素为 $ds_0^2=\left\{dx^1+A\frac{x^2dx^3-x^3dx^2}{1+\frac{K}{4}[(x^2)^2+(x^3)^2]}\right\}^2+\frac{(dx^2)^2+(dx^3)^2}{\left\{1+\frac{K}{4}[(x^2)^2+(x^3)^2]\right\}^2}$	$\frac{(n-2)(n-3)}{2}+4 \quad (n>10)$	第四空隙

(續表)

齐性 Riemann 空間或其綫素	完全运动群的阶数	空隙
7. a. $S_{n-3}\times g_3$ 且无混合运动	$\frac{(n-2)(n-3)}{2}+3 \quad (n>12)$	
b. $ds^2=g_{ab}(x^c)dx^a dx^b+e^{-2x^1}\sum_{\alpha=4}^{n}(dx^\alpha)^2$ $a, b, c=1, 2, 3$, $g_{ab}(x^c)dx^a dx^b$ 为 $g_3(2)$ 的綫素且无混合运动		第五空隙
8. $S_{n-4}\times S_4$ S_{n-4}, S_4 中至少有一个不是欧氏的	$\frac{(n-3)(n-4)}{2}+10 \quad (n>12)$	
9. a. $S_{n-4}\times S_3\times E_1$ S_{n-4}, S_3 都不是欧氏的	$\frac{(n-3)(n-4)}{2}+7 \quad (n>14)$	第六空隙
b. $ds^2=(dx^1)^2+e^{-2cx^1}\sum_{\alpha=2}^{4}(dx^\alpha)^2+e^{-2x^1}\sum_{\alpha=5}^{n}(dx^\alpha)^2 \quad (c\neq 0, 1)$		
10. $S_{n-4}\times S_2\times S_2$ S_{n-4}, S_2, S_2 中至少有 2 个不是欧氏的	$\frac{(n-3)(n-4)}{2}+6 \quad (n>14)$	
11. a. $S_{n-4}\times V_4$ V_4 的完全运动群的迷向群为 $O(2)\times O(1)\times O(1)$	$\frac{(n-3)(n-4)}{2}+5 \quad (n>14)$	
b. $ds^2=ds_1^2+e^{-2x^1}\sum_{\alpha=5}^{n}(dx^\alpha)^2$ ds_1^2 为 V_4 的綫素		
c. $S_{n-4}\times V_4'$ V_4' 具頁 244 的 6) 中的綫素		

(續表)

齐性 Riemann 空間或其綫素	完全运动群的阶数	空隙
12. a. $S_{n-4}\times g_4$ 又无混合运动 b. $ds^2=g_{ab}(x^c)dx^a dx^b+e^{-2x^1}\sum_{\alpha=5}^{n}(dx^\alpha)^2$ $(a, b, c=1, \cdots, 4)$，$g_{ab}dx^a dx^b$ 是 $g_4(3)$ 的綫素又无混合运动	$\frac{(n-3)(n-4)}{2}+4 \quad (n>14)$	第七空隙[1]
13. $S_{n-5}\times S_5$ S_{n-5}, S_5 中至少有一个不是欧氏的	$\frac{(n-4)(n-5)}{2}+15 \quad (n>14)$	第七空隙[1]（上）；第八空隙（下）
14. a. $S_{n-5}\times S_4\times E_1$ S_4, S_{n-5} 都不是欧氏的 b. $ds^2=(dx^1)^2+e^{-2cx^1}\sum_{a=2}^{5}(dx^a)^2+e^{-2x^1}\sum_{\alpha=6}^{n}(dx^\alpha)^2 \quad (c\neq 0, 1)$	$\frac{(n-4)(n-5)}{2}+11 \quad (n>16)$	第八空隙

[1] $n>15$ 时才出現第七空隙，$n=15$ 时容許 70 参数完全运动群的齐性 Riemann 空間有 12a, 12b, 13.

$g_n(n-1)$ 是完全运动群为 n 参数的 n 維群空間，且是具有 $n-1$ 参数的正常子群.

A, C, K 常数.

此外，所列举的綫素都还可以添上一个常数因子.

§6·11 Riemann 空間的不可迁运动群

本章的前面各节中研究的是容許可迁运动群的 Riemann 空間. 在本节中，我們来討論容許不可迁运动群的 Riemann 空間，得出可迁运动群与不可迁运动群之間的联系，并构成容許不可迁运动群的 Riemann 空間的綫素形式.

首先在回溯第三章变换群理論的基础上来討論 n 維空間变换群 G_r 的一些性质. 設 G_r 是坐标为 (x^i) $(i=1, \cdots, n)$ 的 n 維空間的变换群，它的常系数独立的微分算子为 $X_\alpha=\xi^i_\alpha\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ $(\alpha=1, \cdots, r)$，而 G_r 的方程为

$$\bar{x}^i=f^i(x^j, a^\alpha). \qquad (6\cdot11\cdot1)$$

G_r 中使空間一点 $P_0(x^i_0)$ 不动的变换全体构成 P_0 的安定群 G_{P_0}. 設在 $P_0(x^i_0)$ 点 $(\xi^i_\alpha(x))$ 的秩数为 τ_0，則 G_{P_0} 依賴于 $r-\tau_0$ 个参数. 这是因为由 $\xi^i(x)=c^\alpha\xi^i_\alpha(x)$ 所生成的单参数变换群使点 $P_0(x_0)$ 不动的充要条件为 $\xi^i(x_0)=0$，現在 $(\xi^i_\alpha(x_0))$ 的秩为 τ_0，則 $c^\alpha\xi^i_\alpha(x_0)=0$ 的 $r-\tau_0$ 組独立解 c^α_s $(s=\tau_0+1, \cdots, n)$ 所对应的 $n-\tau_0$ 个无穷小向量 $c^\alpha_s\xi^i_\alpha$ 是常系数独立的，并且安定群 G_{P_0} 就是由 $c^\alpha_s\xi^i_\alpha$ 所生成的.

現設 G_r 是 n 維空間的不可迁群，空間中任意点 $P_0(x^i_0)$，在 G_r 下所能变到的点的全体記作 $\mathfrak{M}_{P_0}$. 容易看出 $\mathfrak{M}_{P_0}$ 中任何一点經 G_r 的变换后仍变到 $\mathfrak{M}_{P_0}$ 中的点，且能变到 $\mathfrak{M}_{P_0}$ 中任何一点去(因而 G_r 作为 $\mathfrak{M}_{P_0}$ 上的变换群(即誘导群)而言是可迁的)，我們

称 $\mathfrak{M}_{P_0}$ 为 P_0 点的最小不变流形，自然它也是 $Q\in\mathfrak{M}_{P_0}$ 的最小不变流形．容易証明，最小不变流形上每点安定群同构，且 (ξ^i_α) 的秩数相同．

当 $(\xi^i_\alpha(x_0))$ 的秩为 r_0 时，$\mathfrak{M}_{P_0}$ 为 r_0 維，因而 $\mathfrak{M}_{P_0}$ 的方程为

$$\bar{x}^i=f^i(x_0,\ a^\alpha),$$

这里 a^α 是 $\mathfrak{M}_{P_0}$ 的参数，但并不見得是独立的．从变换群的第一基本定理可知 $\bar{x}^i=f^i(x,\ a)$ 的微分方程

$$\frac{\partial f^i}{\partial a^\alpha}=\xi^i_\alpha(\bar{x})A^\alpha_\beta(a)da^\beta, \tag{6·11·2}$$

并且

$$|A^\alpha_\beta|\neq 0. \tag{6·11·3}$$

将(6·11·2)两边以 $x=x_0$ 代入，由 $\mathfrak{M}_{P_0}$ 每点 (ξ^i_α) 的秩数一样及(6·11·3)式的成立就可推出 $\left(\frac{\partial f^i(x_0,a)}{\partial a^\beta}\right)$ 的秩数为 r_0，因而 $\mathfrak{M}_{P_0}$ 是 r_0 維的．空間中一点 P_0 的最小不变流形的維数未必和其近傍点的最小不变流形的維数相同，在二者相同时該点称为一般点，我們只討論在一般点邻近的情况．

設 V_s 是 n 維空間中一个曲面．如果在 G_r 的作用下，V_s 上的点仍变为 V_s 上的一点，則称 V_s 是 G_r 的不变流形．容易看到，一般的不变流形是由最小不变流形組成的．

現指出最小不变流形的求法．設在所論的区域中，矩陣 $(\xi^i_\alpha(x))$ 在每一点的秩数都是 r_0，那末最小不变流形的維数也为 r_0．由于过每一点有唯一的 r_0 維最小不变流形，所以它們的方程可写成

$$F^1(x)=C^1,\quad F^2(x)=C^2,\ \cdots,\ F^{n-r_0}(x)=C^{n-r_0},$$

式中 $C^1,\ \cdots,\ C^{n-r_0}$ 为任意的常数，$F^1,\ \cdots,\ F^{n-r_0}$ 为独立的函数．从此可見，$F^1,\ F^2,\ \cdots,\ F^{n-r_0}$ 都适合方程

$$X_\alpha F=0\quad(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ r).$$

相反地，由于 $(\xi^i_\alpha(x))$ 的秩数为 r_0，且由于 $[X_\alpha, X_\beta]=c^\gamma_{\alpha\beta}X_\gamma$，所以上述方程有 $n-r_0$ 个独立的解 $F^1, \cdots, F^{n-r_0}$. 作流形

$$F^1(x)=C^1, \quad F^2(x)=C^2, \cdots, F^{n-r_0}(x)=C^{n-r_0},$$

它为 r_0 維的，是群 G_r 的不变流形，因此也是最小不变流形.

現在我們轉入討論 Riemann 空間的不可迁运动群. 設 G_r 为 Riemann 空間 V_n 的不可迁运动群，則 V_n 中总有 $n-1$ 維的不变流形. 任取一个不变流形 S，在上已选好坐标 $x^2, \cdots, x^n$. 又从 S 的每点 $(x^2, \cdots, x^n)$ 作和 S 相直交的測地綫，把这一測地綫上任一点 P 的坐标定为 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$，这里 x^1 是 P 沿这測地綫到 S 上的点的有向距离，那末 $(x^1, \cdots, x^n)$ 可作为空間的一个坐标系統. 在运动群 G_r 之下，測地綫变为測地綫，距离不变，因此

$$x^1=\text{const} \tag{6·11·4}$$

构成一組 $n-1$ 維的不变流形. 从 $x^2=\text{const}, \cdots, x^n=\text{const}$ 为測地綫，x^1 又为測地綫弧长，就可知道 Christoffel 記号 $g_{11}=1$，又由

$$\Gamma^i_{11}=0$$

可得

$$\frac{\partial g_{1l}}{\partial x^1}=0 \quad (l=2, \cdots, n).$$

因为 $x^1=0$ 时 $g_{1\alpha}=0$，所以成立 $g_{1\alpha}=0$，因此 V_n 的綫素为

$$ds^2=(dx^1)^2+g_{lm}(x)dx^l dx^m \quad (l, m=2, \cdots, n). \tag{6·11·5}$$

又由于 $x^1=c^1$(常数)是不变流形，依微分算子 X_σ 的意义立即可得到

$$X_\sigma x^1=0,$$

因此得

$$\xi^1_\sigma=0. \tag{6·11·6}$$

再在 Killing 方程

$$\xi^k_\alpha\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+g_{ik}\frac{\partial \xi^k_\alpha}{\partial x^j}+g_{jk}\frac{\partial \xi^k_\alpha}{\partial x^i}=0$$

$$(i,\ j,\ k=1,\ \cdots,\ n;\ \alpha=1,\ \cdots,\ r)$$

中置 $i=1,\ j=l$ 就得到

$$g_{lm}\frac{\partial \xi_\alpha^m}{\partial x^1}=0 \quad (l,\ m=2,\ \cdots,\ n),$$

因而 ξ_α^m 不依赖于 x^1. 由于 G_r 的有限方程满足微分方程

$$\frac{d\bar{x}^1}{dt}=0, \quad \frac{d\bar{x}^l}{dt}=c^\alpha \xi_\alpha^l(\bar{x}^m),$$

因而得到 G_r 在这个坐标下的方程为

$$\bar{x}^1=x^1, \quad \bar{x}^l=\varphi^l(x^2,\cdots,x^n,a^1,\cdots,a^r) \quad (l=2,\cdots,n), \tag{6·11·7}$$

并且从运动的定义

$$g_{ij}(\bar{x})d\bar{x}^i d\bar{x}^j=g_{ij}(x)dx^i dx^j \tag{6·11·8}$$

可以推出

$$g_{lm}(c^1,\ \bar{x}^h)d\bar{x}^l d\bar{x}^m=g_{lm}(c^1,\ \bar{x}^h)dx^l dx^m$$

$$(l,\ m,\ h=2,\ \cdots,\ n),$$

因而 $\bar{x}^l=\varphi^l(x^2,\ \cdots,\ x^n;\ a^1,\ \cdots,\ a^r)$ 就是不变流形 $x^1=c^1$ 上的运动群. 現設 G_r 的最小不变流形为 $n-k$ 維,如 $k>1$,則 $\bar{x}^l=\varphi^l(x^2,\ \cdots,\ x^n;\ a^1,\cdots,\ a^r)$ 在 $x^1=c^1$ 上仍是不可迁的,那末可在 V_{n-1} 上做适当的坐标变換 $z^l=z^l(x^m)$, 我們就可把 $\bar{x}^l=\varphi^l(x^m,\ a^\alpha)$ 的方程化为

$$\bar{z}^2=z^2, \quad \bar{z}^p=\psi^p(z^q,\ a^\alpha) \quad (p,\ q=3,\ \cdots,\ n),$$

因而对空間 V_n 作坐标变换

$$z^1=x^1, \quad z^l=z^l(x^m) \quad (l,\ m=2,\ \cdots,\ n),$$

群 G_r 的方程可化成

$$\bar{z}^1=z^1, \quad \bar{z}^2=z^2,\ \cdots,\ \bar{z}^p=\psi^p(z^q,\ a^\alpha).$$

如果 $\bar{z}^p=\psi^p(z^q,a^\alpha)$ 在 $z^a=c^a(a=1,\ 2)$ 上仍不可迁,我們可类似地継續做,最后必可选得坐标(仍記为 (x^i))使得 G_r 的方程化为

$$\bar{x}^1=x^1,\ \bar{x}^2=x^2,\ \cdots,\ \bar{x}^k=x^k,\ \ \bar{x}^\lambda=\varphi^\lambda(x^\mu,a^\alpha)$$

$$(\lambda,\ \mu=k+1,\ \cdots,\ n;\ \alpha=1,\ \cdots,\ r), \tag{6·11·9}$$

这里 $\bar{x}^\lambda=\varphi^\lambda(x^\mu,\ a^\alpha)$ 是最小不变流形 $x^a=c^a(a=1,\ \cdots,\ k)$ 上的

可迁运动群，記作 $\widetilde{G}_r$.

現在我們进一步将容有不可迁运动群(6·11·9)的 Riemann 空間的綫素写出来. 根据(6·11·8)及(6·11·9)可得

$$g_{ab}(\bar{x}^\lambda, x^c)dx^a dx^b + g_{a\lambda}(\bar{x}^\mu, x^c)\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta}dx^a dx^\beta$$

$$+g_{\lambda\mu}(\bar{x}^\lambda, x^c)\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\sigma}dx^\rho dx^\sigma$$

$$=g_{ab}(x)dx^a dx^b + g_{a\lambda}(x)dx^a dx^\lambda + g_{\lambda\mu}(x)dx^\lambda dx^\mu$$

$$(\lambda,\ \mu,\ \rho,\ \sigma=k+1,\ \cdots,\ n;\ a,\ b,\ c=1,\ \cdots,\ k).$$

比較上式两边的系数，就成立

$$g_{ab}(\bar{x}^\lambda, x^c)=g_{ab}(x^\lambda, x^c), \tag{6·11·10}$$

$$g_{a\lambda}(\bar{x}^\mu, x^c)\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\mu}=g_{a\mu}(x^\lambda, x^c), \tag{6·11·11}$$

$$g_{\lambda\mu}(\bar{x}^\lambda, x^c)\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\sigma}=g_{\rho\sigma}(x^\lambda, x^c). \tag{6·11·12}$$

由(6·11·10)式，利用 $\widetilde{G}_r$ 在不变流形 $x^a=c^a$ 上的可迁性可知 g_{ab} 与 x^α 无关；(6·11·11)式表示当 x^c 取为常数时 $g_{a\lambda}$ (对固定 a)是 $\widetilde{G}_r$ 下的不变共变向量，而 $g_{a\lambda}(a=1,\cdots,k)$就是 k 个不变的共变向量場；(6·11·12)式說明 $\widetilde{G}_r$ 是最小不变流形 $x^a=c^a$ 的运动群. 現設 G_r 有 s 个独立的不变向量場，記为 $h^\tau_\lambda(x^\gamma)$ $(\lambda=k+1,\cdots,n;$ $\tau=1,\cdots,s)$，則 $\widetilde{G}_r$ 的其余不变向量場必为它們的綫性組合，因而

$$g_{\lambda a}=A_{a\tau}(x^c)h^\tau_\lambda(x^\gamma),$$

所以 V_n 的綫素为

$$ds^2=g_{ab}(x^c)dx^a dx^b+A_{a\tau}(x^c)h^\tau_\lambda(x^\gamma)dx^a dx^\lambda$$

$$+g_{\rho\sigma}(x^a, x^\lambda)dx^\rho dx^\sigma. \tag{6·11·13}$$

另一方面，如果 V_n 的綫素可写成(6·11·13)，且式中 $g_{\rho\sigma}(x^a,x^\lambda)$ $\cdot dx^\rho dx^\sigma$ 当 $x^a=c^a$ 时均容許可迁运动群 $\widetilde{G}_r$: $\bar{x}^\lambda=\varphi^\lambda(x^\mu,a^\alpha)$，且 $h^\tau_\lambda(x^\gamma)$ 为此群的独立的不变共变向量場的全系，則(6·11·13)就是容許不可迁运动群 G_r

$$\bar{x}^a=x^a,\ \bar{x}^\lambda=\varphi^\lambda(x^\mu,\ a^\alpha)\quad(a=1,\ \cdots,\ k;\ \lambda,\ \mu=k+1,\ \cdots,\ n)$$

的 Riemann 空間的綫素，这时 $x^a=c^a$ 是 G_r 的最小不变流形.

由于不可迁运动群 G_r 的参数个数和它的最小不变流形上的一个可迁运动群 $\bar{G}_r$ 的参数个数相同，我們容易得到不可迁运动群的空隙.

从此可見，如果我們已經研究清楚容許可迁运动群的 Riemann 空間(包括研究清楚这个空間的不变向量場在內)，我們就可以依(6·11·13)式作出容許不可迁运动群的 Riemann 綫素，$g_{ab}(x^c)$，$A_{a\tau}(x^\sigma)$都是任意的函数，但要使綫素保持为正定，依 §6·2 的討論也可知道，$g_{\rho\sigma}(x^a,\ x^\lambda)$实际上也只是綫性地依賴于 x^a 的一些函数，这样的考慮已見于 Cartan E.[5].

§6·12 Riemann 空間的相似变换群，仿射变换群，共形变换群

在 §6·3 中我們已經牽涉到相似变换群，在本节中我們先来确定出所有的可作为 Riemann 空間相似群的变换群以及容許相似群的 Riemann 空間的綫素形式，同时也討論了仿射变换群和共形变换群.

設綫素为 $g_{ij}(x)dx^idx^j\ (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 的 n 維 Riemann 空間的单参数变换群

$$\bar{x}^i=f^i(x,\ t)\tag{6·12·1}$$

是相似变换群，則成立

$$g_{ij}(\bar{x})d\bar{x}^id\bar{x}^j=A(t)\cdot g_{ij}(x)dx^idx^j.\tag{6·12·2}$$

容易証明，单参数变换群是相似变换群的充要条件为

$$\xi_{i,j}+\xi_{j,i}=\psi g_{ij},\tag{6·12·3}$$

这里 ψ 是常数，ξ_i 是单参数变换群的无穷小向量，$\psi\neq0$ 称为眞正相似群.

現設 V_n 容許 r 参数相似变換群 G_r，其独立的微分算子为 $X_\alpha=\xi^i_\alpha\frac{\partial}{\partial x^i}$ $(\alpha=1, \cdots, r; i=1, \cdots, n)$，則成立

$$\xi_{\alpha i,j}+\xi_{\alpha j,i}=\psi_\alpha g_{ij}, \tag{6·12·4}$$

式中 ψ_α 是常数．不失一般性，可假定 $\psi_1\neq 0$，作

$$\bar{\xi}^i_\lambda=\xi^i_1-\frac{\psi_1}{\psi_\lambda}\xi^i_\lambda \quad (\lambda=2, \cdots, r), \tag{6·12·5}$$

并以 ξ^i_1, $\bar{\xi}^i_\lambda$ 作为 G_r 的无穷小向量的基，仍記为 ξ^i_1, ξ^i_λ，就得到

$$\begin{aligned}&\xi_{1i,j}+\xi_{1j,i}=\psi_1 g_{ij},\\&\xi_{\lambda i,j}+\xi_{\lambda j,i}=0.\end{aligned} \tag{6·12·5'}$$

由于$[X_1, X_\lambda]$所生成的单参数群是运动群，由此得出

$$[X_\alpha, X_\lambda]=c^\rho_{\alpha\lambda}X_\rho \quad (\lambda, \rho=2, \cdots, r).$$

因而 Riemann 空間 V_n 的相似变換群 G_r 容有一个 $r-1$ 参数的运动子群，且为正常子群．

如所知，欧氏空間 E_n 的相似变換在直交笛卡儿坐标下为 $\bar{x}^i=\sigma a^i_j x^j$，这里 (a^i_j) 为直交群，因而 E_n 的完全相似群依賴于 $\frac{n(n+1)}{2}+1$ 个参数．

現設 Riemann 空間 V_n 并非欧氏空間，G_r 是 V_n 的可迁变換群，則利用 § 6·3 中的定理 5：齐性 Riemann 空間如容許眞正的相似变換，則必为欧氏空間，可以推出 G_r 的运动子群必为 V_n 的不可迁群，且由于 G_r 是可迁的，所以 G_{r-1} 的最小不变流形必为 $n-1$ 維，因此得到：Riemann 空間(不是欧氏空間)的可迁相似变換群 G_r 必具 $r-1$ 参数的不可迁的正常运动子群 G_{r-1}，它的最小不变流形为 $n-1$ 維．

相反地，如果 G_r 是作用在 n 維空間 M_n 的一个可迁变換群(因而 M_n 是一齐性空間)，它有 $r-1$ 参数正常子群 G_{r-1}，且 G_{r-1} 可作为一 n 維 Riemann 空間的不可迁运动群，它的最小不变流形为 $n-1$ 維，則 G_r 必可作为一 Riemann 空間的可迁相似群．

事实上,設 $X_\alpha(\alpha=1,\cdots,r)$ 为 G_r 的微分算子, $X_\lambda(\lambda=2,\cdots,r)$ 是 G_{r-1} 的微分算子,由假定可知

$$[X_1, X_\lambda]=c_{1\lambda}^{\rho}X_\rho \quad (\lambda, \rho=2, \cdots, r). \quad (6\cdot12\cdot6)$$

設 (ξ_α^i) 的秩在每点一样, 我們可在这 n 維空間中选坐标使 $x^1=$ 常数是群 G_{r-1} 的一个最小不变流形,这时就成立

$$X_\lambda x^1=0. \quad (6\cdot12\cdot7)$$

又根据(6·12·6)式可得

$$X_\lambda(X_1x^1)=0. \quad (6\cdot12\cdot8)$$

因为 G_{r-1} 的最小不变流形是 $n-1$ 維的, 由(6·12·8)得到 $X_1x^1=\phi(x^1)$, 因而 $\xi_1^1=\phi(x^1)$. 选 x^1 的适当函数代替 x^1(仍記为 x^1)就能有 $\xi_1^1=1$. 这样, 在 X_1 所对应的单参数变换群下,

$$\bar{x}^1=x^1+a^1,$$

这时群 G_r 的方程采取形式

$$\bar{x}^1=x^1+a^1,$$

$$\bar{x}^p=f(x^1, x^q, a^1, \cdots, a^r) \quad (p, q=2, \cdots, n). \quad (6\cdot12\cdot9)$$

在其中置 $a^1=0$ 就得到群 G_{r-1} 的方程. 由此还显然可見 G_r 中使点 $(x^1, \cdots, x^n)$ 不动的变换必属于 G_{r-1}, 而在 G_{r-1} 中使 $(x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^n)$ 点不变的子群就是 G_{r-1} 在这点的安定群,所以 G_r 的安定群就是 G_{r-1} 的安定群,从而 G_r 的迷向群就是 G_{r-1} 的迷向群. 由于 G_{r-1} 可作为 Riemann 空間的运动群,所以 G_r 的迷向群是直交群或其子群. 根据齐性空間理論就可知, 在 M_n 上可引进一 Riemann 綫素 $ds^2=g_{ij}(x)dx^idx^j$,使 G_r 为这个 Riemann 空間的运动群. 我們在 M_n 上再作綫素

$$ds^2=e^{x^1}(g_{ij}(x)dx^idx^j),$$

由 (6·12·9) 式可見这样所得的 Riemann 空間 V_n 就以 G_r 为相似变换群.

这样就証明了

定理 1 n 維 Riemann 空間 V_n(不是欧氏空間)的可迁相似变換群 G_r 有正常子群 G_{r-1},它是 V_n 的一个不可迁运动子群,最小不变流形为 $n-1$ 維的. 相反地,一变換群 G_r, 如有作为 n 維 Riemann 空間的不可迁运动群(最小不变流形 $n-1$ 維) 的正常子群 G_{r-1},則 G_r 必可作为一 n 維 Riemann 空間的可迁变換群.

从証明过程中我們看到,一变換群如能作为 Riemann 空間(除欧氏空間外)的可迁相似变換群,則必可作为一 Riemann 空間的运动群. 由此可知, Riemann 空間的可迁相似变換群或者可作为其他 Riemann 空間的运动群,或者是欧氏空間的相似变換群或其子群.

另一方面, 給定某一 n 維 Riemann 空間的不可迁运动群 G_{r-1}(最小不变流形 $n-1$ 維),我們总能做可迁群 G_r,它以 G_r 为正常子群.

事实上, 設 G_{r-1} 作用在空間 M_n 上, 依照不可迁运动群的性质,存在坐标系統,使 $x^1=$ 常数是群 G_{r-1} 的最小不变流形,而所有的算子 $X_\lambda(\lambda=1, 2, \cdots, r)$ 可写作

$$X_\lambda=\xi^a_\lambda(x^b)\frac{\partial}{\partial x^b}\quad(a,b=2,\cdots,n;\ \lambda=2,\cdots,r). \tag{6·12·10}$$

我們的問題实质上是要求 G_{r-1} 的正常化因子, 这就归結于求解 X_1 及 $c^\mu_{1\lambda}$, 使滿足

$$[X_1,\ X_\lambda]=c^\mu_{1\lambda}X_\mu, \tag{6·12·11}$$

并且要求 $\{X_\alpha\}$ 所生成的变換群是可迁的.

令 $X_1=\xi^i_1\dfrac{\partial}{\partial x^i}$,将(6·12·11)式改写成

$$\xi^a_\lambda\frac{\partial\xi^1_1}{\partial x^a}=0, \tag{6·12·12}$$

$$\xi^a_1\frac{\partial\xi^b_\lambda}{\partial x^a}-\xi^a_\lambda\frac{\partial\xi^b_1}{\partial x^a}=c^\mu_{1\lambda}\xi^b_\mu, \tag{6·12·13}$$

式中 ξ^i_1 为未知函数, $c^\mu_{1\lambda}$ 为任意常数. 我們把 (6·12·12),

(6·12·13) 看成 ξ_1^1 和 $c_{1\lambda}^\mu$ 的方程，这一組方程必有解，例如在 G_{r-1} 中取一微分算子 $\xi^a \frac{\partial}{\partial x^a}$，并添上任意的 $\xi^1(x^1)\frac{\partial}{\partial x^1}$，作为 $X_1=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，就能滿足一切要求.

这样我們就得到：任意 n 維 Riemann 空間（非欧氏空間）的可迁相似变换群均可由 $n-1$ 維 Riemann 空間的可迁运动群添上 (6·12·12)，(6·12·13) 的解（但 $\xi_1^1\neq 0$）得出，并且任意一个 $n-1$ 維 Riemann 空間的可迁运动群均可按上述方法扩充为 n 維 Riemann 空間的可迁相似变换群.

現在我們来确定容許可迁相似变换群的 Riemann 空間的綫素形式. 如上面所述，如 V_n（并非欧氏的）容許可迁相似变换群 G_r，$x^1=$常数是 G_r 的正常运动子群 G_{r-1} 的最小不变流形，G_r 和 G_{r-1} 的微分算子 $X_\alpha(\alpha=1, 2, \cdots, r)$ 与 $X_\lambda(\lambda=2, \cdots, r)$ 之間成立关系式(6·12·6)，适当选取坐标 x^1，使 X_1 所对应的单参数变换群 G_1 的方程中包括 $\bar{x}^1=x^1+a^1$，因而 G_1 中对应于参数 a_0^1 的变换将 G_{r-1} 的最小不变流形 $x^1=c^1$ 整个地变到 G_{r-1} 的另一个最小不变流形 $x^1=a_0^1+c^1$ 上去. 注意到这点之后，我們就可如下地选擇 V_n 的坐标：在 $x^1=0$ 上取好坐标 $x^2, \cdots, x^n$，又規定当自点 $P(0, x^2, \cdots, x^n)$ 发出的 G_1 的变换軌綫交 $x^1=c^1$ 于点 Q 时，則 Q 点的坐标就取为 $(c^1, x^2, \cdots, x^n)$. 对这样确定的 V_n 的坐标系統，G_1 的方程为

$$\bar{x}^1=x^1+a^1, \quad \bar{x}^a=x^a \quad (a=2, \cdots, n).$$

因这时 $X_1=\frac{\partial}{\partial x^1}$，所以由(6·12·12)式得

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1}=\psi_1 g_{ij},$$

因此有

$$g_{ij}=e^{\psi_1 x^1}h_{ij}(x^a).$$

不妨将 ψ_1 取为 2，空間綫素为

$$ds^2=e^{2x^1}h_{ij}(x^a)dx^idx^j. \qquad (6\cdot12\cdot14)$$

因为在群 G_{r-1} 下 x^1 不变，所以 $h_{ij}(x^a)dx^idx^j$ 为容許不可迁运动群 G_{r-1} 的 Riemann 綫素，其最小不变流形为 $n-1$ 維的 $x^1=$ 常数.

相反地，如 $h_{ij}(x^a)dx^idx^j$ 为容許 $r-1$ 参数不可迁运动群的 Riemann 綫素，最小不变流形为 $x^1=$ 常数，那末綫素为(6·12·14)的 Riemann 空間显然容有可迁相似群，因为除 G_{r-1} 外，还可添上单参数的相似变换群 (6·12·12)，因而一定有 V_n 的完全相似群包括 G_{r-1} 与 G_1. 回到一般坐标系統，我們就有

定理 2 容許可迁相似变换群的 Riemann 空間只有

(i) 欧氏空間，

(ii) 綫素为 $ds^2=\sigma(x)h_{ij}(x)dx^idx^j$ 的空間，其中 $h_{ij}(x)dx^idx^j$ 为容許不可迁运动群的 Riemann 空間，最小不变流形为 $n-1$ 維的 $\sigma(x)=$ 常数，函数 σ 滿足 $X_\alpha\sigma=c_\alpha\sigma$ (c^α 是常数)，这里 X_α 是 G_r 的微分算子李代数的任一組基.

現在我們要在定理 2 的基础上确定出欧氏空間外容許最大参数相似群的空間.

設 V_n (不是欧氏空間) 容許最大参数运动群 G_r，它的不可迁运动子群 G_{r-1} 有 $n-1$ 維最小不变流形，为使 V_n 容許最大参数相似群起見，这些最小不变流形必为常曲率的，因而得到群 G_r 的参数

$$r=\frac{n(n-1)}{2}+1. \qquad (6\cdot12\cdot15)$$

又由定理 2 知 V_n 的綫素具有形狀

$$ds^2=e^{2x^1}(g_{ij}(x^\alpha)dx^idx^j)=e^{2x^1}d\tau^2 \quad (\alpha=2,\ \cdots,\ n), \qquad (6\cdot12\cdot16)$$

而 $x^1=$ 常数是 G_{r-1} 的最小不变流形，且为常曲率的. 由于 $d\tau^2$ 容許不可迁运动群 G_{r-1}，因而 $d\tau^2$ 的綫素可化为

$$d\tau^2=a(x^1)(dx^1)^c+c_s(x^1)A_a^s(x^b)dx^1dx^a+g_{ab}(x)dx^adx^b$$

$$(s=1,\ \cdots,\ h;\ a=2,\ \cdots,\ n), \qquad (6\cdot12\cdot17)$$

这里 $A_a^s(x^b)$ 是 G_{r-1} 在 $x^1=x_0^1=$常数上誘导群 $\widetilde{G}_{r-1}$ 的 h 个独立的不变向量(共变的)場，$g_{ab}(x_0^1, x^c)dx^a dx^b$ 为 $\widetilde{G}_{r-1}$ 的不变綫素，但 $\widetilde{G}_{r-1}$ 在 $x^1=$常数上的迷向群是全直交群，因而 $\widetilde{G}_{r-1}$ 的迷向群不可約，因此 $A_a^s(x^b)=0$，又由 § 6·2 可知这些最小不变流形上的綫素除常数外是唯一确定的．因而

$$d\tau^2=a(x^1)(dx^1)^2+\sigma(x^1)f_{ab}(x^c)dx^a dx^b$$

$$(a,\ b,\ c=2,\ \cdots,\ n),$$

这里 $x^1=$常数时 $\sigma(x^1)f_{ab}(x^c)dx^a dx^b$ 是 $n-1$ 維常曲率空間的綫素，因而

$$ds^2=e^{2x^1}(a(x^1)(dx^1)^2+\sigma(x^1)f_{ab}(x^c)dx^a dx^b).$$

又由于 V_n 容許 G_1: $\bar{x}^1=x^1+a$, $\bar{x}^a=x^a$ 为相似群，因而成立

$$e^{2(x^1+a^1)}[a(x^1+a^1)(dx^1)^2+\sigma(x^1+a^1)f_{ab}(x^c)dx^a dx^b]$$
$$=A(a^1)e^{2x^1}[a(x^1)(dx^1)^2+\sigma(x^1)f_{ab}(x^c)dx^a dx^b].$$

比較系数就得到在 G_1 的变換下，

$$e^{2a^1}\sigma(x^1+a^1)=A(a^1)\sigma(x^1), \qquad (6\cdot12\cdot18)$$

$$e^{2a^1}a(x^1+a^1)=A(a^1)a(x^1). \qquad (6\cdot12\cdot19)$$

記

$$B(a^1)=A(a^1)e^{-2a^1}, \qquad (6\cdot12\cdot20)$$

将(6·12·18)式关于 a^1 微分，再令 $a^1=0$，就得到

$$\sigma'(x^1)=h\sigma(x^1),$$

这里常数 $h=B'(0)$．由此得出

$$\sigma(x^1)=k_1e^{hx^1};$$

类似地得到

$$a(x^1)=k_2e^{hx^1},$$

k_1, $k_2>0$ 为常数．进行适当的坐标变換，变換后坐标仍記为 x^i，則 V_n 的綫素化为

$$ds^2=(dx^1)^2+(x^1)^2g_{ab}(x^c)dx^a dx^b \quad (a,b=2,\cdots,n), \qquad (6\cdot12\cdot21)$$

式中 $g_{ab}(x^a)dx^a dx^b$ 是常曲率的綫素，因而可見 V_n 是一种特殊的

次射影空間,故得

定理 3 除欧氏空間外，容許最大参数可迁相似变换群的 Riemann 空間 V_n 的綫素必可化为綫素 (6·12·21)，其中的 $g_{ab}(x^c)dx^a dx^b$ 是常曲率綫素，且这样的空間 V_n 所容許的完全相似群依賴于 $r=\frac{n(n-1)}{2}+1$ 个参数.

除了欧氏空間及次射影空間(6·12·21)之外,容許可迁相似群的 Riemann 空間中的最大参数是多少,空間又是怎样? 下面我們就来解答这个問題.

首先容易看出当 $n>5$ 时，这个参数 $r=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2$. 这是因为 G_r 的运动子群 G_{r-1} 的最小不变流形为 $n-1$ 維，而根据 Riemann 空間运动群的第一空隙性定理就知

$$r-1=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1,$$

就得出这个結論.

为确定空間的綫素起見，对所論的空間取坐标使 $x^1=$ 常数为 G_{r-1} 的最小不变流形,则綫素可化为

$$ds^2=e^{2x^1}d\tau^2,$$

而 $d\tau^2$ 具 (6·12·17) 的形式，超曲面 $x^1=$ 常数容許可迁运动群 $\overline{G}_{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1}$，且具有一个不变向量場. 利用 § 6·5 中結果，又注意到 $\overline{G}_{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1}$ 的不变向量場就是 x^2 坐标曲綫的单位切向量，也即 $x^1=$ 常数曲面上以 $(1, 0,\cdots,0)$ 为共变支量的向量，則所論的空間的綫素形式为

$$\text{(i)}\quad ds^2=e^{2x^1}[a(x^1)(dx^1)^2+b(x^1)dx^1dx^2+d(x^1)(dx^2)^2 +h(x^1)f_{\alpha\beta}(x^\gamma)dx^\alpha dx^\beta]\quad (\alpha,\ \beta=3,\ \cdots,\ n),$$

这里 $f_{\alpha\beta}(x^\gamma)dx^\alpha dx^\beta$ 是 $n-2$ 維常曲率空間的綫素,或

$$\text{(ii)}\quad ds^2=e^{2x^1}[a(x^1)(dx^1)^2+b(x^1)dx^1dx^2+d(x^1)(dx^2)^2$$

$$+f(x^1)e^{-2x^2}\sum_{\alpha=3}^{n}(dx^\alpha)^2].$$

又由于 V_n 容許 G_1: $\bar{x}^1=x^1+a$, $\bar{x}^a=x^a$ 为相似群，与定理 3 中証明时一样可以得出

$$a(x^1)=k_1e^{hx^1},\quad b(x^1)=k_2e^{hx^1},$$
$$d(x^1)=k_3e^{hx^1},\quad h(x^1)=k_4e^{hx^1},$$

这里 k_1, k_2, k_3, k_4, h 均为常数. 将它們代入綫素形式 (i), (ii) 中，且經过适当的坐标变换，变换后的坐标仍記为 x^i, 則綫素(i)(ii)可化为

$$\text{(i)}'\qquad ds^2=ke^{2x^1}[(dx^1)^2+2l\,dx^1dx^2+(dx^2)^2+f_{\alpha\beta}(x^\gamma)dx^\alpha dx^\beta],\tag{6·12·22}$$

式中 $f_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ 是 $n-2$ 維的常曲率綫素, α, $\beta=3$, $\cdots$, n, 或

$$\text{(ii)}'\qquad ds^2=ke^{2x^1}[(dx^1)^2+2l\,dx^1dx^2+(dx^2)^2+e^{-2x^2}\sum_{\alpha=3}^{n}(dx^\alpha)^2],\tag{6·12·23}$$

这里 $k>0$, $l(l^2<1)$ 为常数.

上面我們研究的是 Riemann 空間的可迁相似变换群及其綫素形式，現在我們要对 Riemann 空間的不可迁相似变换群进行研究，首先我們得到

定理 4　Riemann 空間 V_n 如果容有不可迁相似变换群 G_r, 則必存在另一 Riemann 空間 $\bar{V}_n$, 共形于 V_n, 而以 G_r 为其不可迁运动群.

【証】　設綫素为 $g_{ij}(x)dx^idx^j$ $(i, j=1, \cdots, n)$ 的 Riemann 空間 V_n 容有一个不可迁的相似变换群 G_r, ξ^i_ε $(\varepsilon=1, 2, \cdots, r)$ 是 G_r 的独立的无穷小向量，且 (ξ^i_ε) 的秩为 $n-k$, 則可选坐标使 G_r 的方程为

$$\bar{x}^a=x^a,\quad \bar{x}^\alpha=\varphi^\alpha(x^\beta, a^\varepsilon)$$
$$(a=1, \cdots, k;\ \alpha, \beta=k+1, \cdots, n;\ \varepsilon=1, \cdots, r),\tag{6·12·24}$$

而 $\widetilde{G}_r$: $x^a=\varphi^a(x^\beta, a^e)$ 是最小不变流形 $x^c=$常数上的可迁相似群. 由于 G_r 为相似群,故有

$$g_{ij}(\bar{x})d\bar{x}^i d\bar{x}^j=\rho(a^e)g_{ij}(x)dx^i dx^j,$$

再利用(6·12·24)就写出

$$g_{ab}(\bar{x}^\gamma, x^c)=\rho(a^e)g_{ab}(x^\beta, x^c).$$

設 $f(x)$ 在 $\widetilde{G}_r$ 下是变换因子为 $\rho(x)$ 的数量場,即为滿足

$$f(\bar{x}^\alpha, x^c)=\rho(a^e)f(x^\alpha, x^c) \tag{6·12·25}$$

的数量函数 $f(x)$. 容易証明,它滿足方程

$$X_\sigma f=\psi_\sigma f. \tag{6·12·26}$$

相反地,(6·12·26)的解必滿足(6·12·25)式. 分两种情形来討論:

(i) (6·12·26)有非零解,此时可作綫素

$$\frac{1}{f(x^\alpha, x^c)}ds^2,$$

它在群 G_r 下不变, 因而 G_r 可作为另一 Riemann 空間的运动群,此空間的綫素和原空間差一个因子.

(ii) (6·12·26)只有零解,此时 g_{ab} 必須为零,但由于 V_n 是正定的,这就推出矛盾,因而这种情况不会发生.

由这个定理可知,一变换群如可作为 Riemann 空間的不可迁相似群,必可作为 Riemann 空間的不可迁运动群. 反过来显然不成立,但我們有

定理 5 n 維空間中具有 s 維最小不变流形的 r 参数不可迁变换群 G_r 能作为 Riemann 空間的不可迁相似变换群的充要条件是 G_r 有 $r-1$ 参数的正常运动子群, 其最小不变流形为 $s-1$ 維.

【証】 先証必要性. 設 G_r 是 V_n 的不可迁相似变换群,现对下述二种情形分别进行討論.

(i) 当最小不变流形具欧氏綫素时,在适当坐标下,G_r 的每

个变换的方程可化为如下的形状:

$$\bar{x}^a=x^a,\quad \bar{x}^\alpha=Aa^\alpha_\beta x^\beta+c^\alpha$$

$$(a=1,\ \cdots,\ n-s;\ \alpha,\ \beta=n-s+1,\ \cdots,\ n),$$

这里 A, c^α 与 a^α_β 均和 x 无关, A 不恒为 1, (a^α_β) 是直交陣. 因而迷向群也是相似群, 由此知 G_r 不能作为一 Riemann 空間的运动群,这与定理 4 矛盾, 因而情形 (i) 是不会发生的.

(ii) G_r 的最小不变流形并非欧氏的, 这时由于在适当坐标下, G_r 的方程可化为

$$\bar{x}^a=x^a,\quad \bar{x}^\alpha=f^\alpha(x^\beta,\ a^\varepsilon)$$

$$(\alpha,\ \beta=n-s+1,\ \cdots,\ n;\ \varepsilon=1,\ \cdots,\ r),$$

且 $\widetilde{G}_r$: $\bar{x}^\alpha=f^\alpha(x^\beta,a^\varepsilon)$ 是最小不变流形上的可迁相似变换群. 利用定理 1, 就可見必要性的成立.

充分性. 設 $X_1=\xi^i_1\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $\cdots$, $X_r=\xi^i_r\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 是 G_r 的独立的微分算子,而其中 $X_\lambda(\lambda=2,\ 3,\ \cdots,\ r)$ 是 G_{r-1} 的微分算子,如果 $X_1F=0$, $\cdots$, $X_nF=0$ 的 $n-s$ 个独立解为 f^1, $\cdots$, f^{n-s}, $X_\lambda f=0$ 的 $n-s+1$ 个独立解为 f^1, $\cdots$, f^{n-s}, f^{n-s+1}, 我們在这 n 維空間中选坐标使 f^1, $\cdots$, f^{n-s+1} 为新坐标系統的前面 $n-s+1$ 个坐标,仍記为 x^1, $\cdots$, x^{n-s+1}, 这时 $x^a=c^a$ 是最小不变流形,且

$$\xi^a_\varepsilon=0,\quad \xi^{n-s+1}_\lambda=0$$

$$(\varepsilon=1,\ \cdots,\ r;\ \lambda=2,\ \cdots,\ r;\ a=1,\ \cdots,\ n-s).\tag{6·12·27}$$

这时 G_r 的方程中包括 $\bar{x}^a=x^a$. 又由于 G_{r-1} 是正常子群,我們从

$$[X_1,\ X_\lambda]=c^\rho_{1\lambda}X_\rho\quad 及\quad X_\lambda x^{n-s+1}=0$$

就可推出

$$X_\lambda(X_1x^{n-s+1})=0,$$

因而

$$X_1x^{n-s+1}=\Phi(x^a,\ x^{n-s+1}),\quad \xi^{n-s+1}_1=\Phi(x^a,\ x^{n-s+1}).$$

作坐标变换

$$x'^a = x^a \quad (a=1, \cdots, n-s),$$

$$x'^{n-s+1} = \int \frac{1}{\xi_1^{n-s+1}(x^a, x^{n-s+1})} dx^{n-s+1},$$

$$x'^p = x^p \quad (p=n-s+2, \cdots, n),$$

就可使 $\xi_1^{n-s+1}=1$, 且(6·12·27)仍然成立. 我們仍将 x' 記为 x, 在这坐标系統下, 群 G_r 的方程为

$$\bar{x}^a = x^a,$$

$$\bar{x}^{n-s+1} = x^{n-s+1} + c^1,$$

$$\bar{x}^p = f^p(x, c^1, \cdots, c^r),$$

因为 $\bar{x}^{n-s+1} = x^{n-s+1}$ 的充要条件为 $c^1=0$, 所以 G_r 与 G_{r-1} 的安定群一致, G_r 的迷向群也为直交群. 这样就証明了 G_r 能使一个 n 維 Riemann 綫素不变, 設这个綫素是 $g_{ij}(x)dx^i dx^j$, 則作

$$ds^2 = e^{x^{n-s+1}} g_{ij}(x) dx^i dx^j, \qquad (6·12·28)$$

它以 G_r 为不可迁相似群, 不变流形为 s 維, 充分性証毕.

此外, 我們又可得到: 容許最大参数不可迁相似群的 Riemann 空間 V_n(除歐氏空間外)的綫素必可化为

$$ds^2 = e^{2x^2}(h_{ab}(x^1)dx^a dx^b + \sigma(x^1) g_{\alpha\beta}(x^\gamma) dx^\alpha dx^\beta)$$

$$(a, b=1, 2; \alpha, \beta=3, \cdots, n), \qquad (6·12·29)$$

式中 $g_{\alpha\beta}(x^\gamma)dx^\alpha dx^\beta$ 为 $n-2$ 維常曲率空間的綫素, $h_{ab}(x^1)$ 与 $\sigma(x^1)$ 为 x^1 的任意函数, 这样的空間 V_n 所容許的相似群的参数为 $r=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$. 这个事实我們在此不加以証明[1].

在 §6·3 的注解中我們已定义过 Riemann 空間的仿射变换, 并指出了相似变换是一种特殊的仿射变换. 現在我們来討論 Riemann 空間的仿射变换群, 而把仿射变换群的决定归結到相似变换群的决定.

[1] 有关仿射变换群的研究可見 Yano K. [3], Yano K. 和 Knebelman M. S. [1], Hiramatu H. [1] 等著作, 本节的結果見胡和生[3].

設 Riemann 空間 V_n 的单参数变换群

$$\bar{x}^i = f^i(x,\ t) \tag{6·12·30}$$

使 V_n 中向量的平行性保持不变，則称它为单参數仿射变換群. 显然，(6·12·30) 为 V_n 的仿射变換群的充要条件是它滿足

$$\Gamma^i_{jk}(\bar{x}) = \Gamma^l_{mh}(x)\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}. \tag{6·12·31}$$

如果 $\xi^i(x)$ 为 (6·12·30) 的无穷小向量，則我們由 (6·12·31) 出发容易証明 (6·12·30) 为单参数仿射变换群的充要条件是

$$(\xi_{i,j} + \xi_{j,i})_{,k} = 0. \tag{6·12·32}$$

Eisenhart L. P. [2] 會得到这样的結果：設 Riemann 空間 V_n 容有 2 阶对称共变張量 a_{ij} 滿足 $a_{ij,k}=0$，則 V_n 必可分解为低維 Riemann 空間的乘积，即

$$\begin{aligned} ds^2 = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^p)^2 + g_{i_1j_1}(x^{k_1})dx^{i_1}dx^{j_1} + \cdots \\ + g_{i_lj_l}(x^{k_l})dx^{i_l}dx^{j_l}, \end{aligned} \tag{6·12·33}$$

这里变量 $x^i(i=1,\ 2, \cdots,\ n)$ 分成了 $l+1$ 組 x^{i_0}, $x^{i_a}(i_0=1, \cdots, p;$ $a=1,\ \cdots,\ l)$，而每一个 $ds^2_a(a=1,\ \cdots,\ l)$ 均是非 1 維的且只包含 x^{i_a}, dx^{i_a}，又都不可再分解，并且

$$a_{ij}dx^idx^j = c_1(dx^1)^2 + \cdots + c_p(dx^p)^2 + f_1 ds^2_1 + \cdots + f_l ds^2_l, \tag{6·12·34}$$

这里 $c_1,\ \cdots,\ c_p,\ f_1,\ \cdots,\ f_l$ 都是常数.

由于 (6·12·32) 式的成立，可知容許仿射变換群的 Riemann 空間必容許二阶对称張量 $a_{ij}=\xi_{i,j}+\xi_{j,i}$，其共变导数为 0，因而利用上述結果可得到当 Riemann 空間 V_n 不是乘积空間时，$a_{ij}=\xi_{i,j}+\xi_{j,i}=cg_{ij}$ (c 为常数)．因而得到：Riemann 空間如不为乘积空間，則它的眞正仿射变換群是眞正相似变換群.

当 Riemann 空間 V_n 分为乘积 (6·12·33) 时，我們将 ξ^i 也分成 $l+1$ 組 ξ^{i_0}, ξ^{i_l}；容易証明支量 ξ^{i_σ} 仅依賴于 $x^{i_\sigma}(\sigma=0, 1, \cdots,$ $l)$，換言之，V_n 中由 ξ^i 所确定的单参数仿射变換群是 p 維欧氏

空間与非一維的 ds_a^2 $(a=1, \cdots, l)$ 中由 ξ^{i_0}及 ξ^{i_a} 所生成的单参数仿射变換群的乘积. 因而得到

定理 6 如 Riemann 空間 V_n 的綫素可化为 $ds^2=ds_0^2+ds_1^2+\cdots+ds_l^2$,这里 ds_0^2 为欧氏綫素, $ds_1^2, \cdots, ds_l^2$ 为非一維 Riemann 綫素, 則 V_n 的仿射变換群是由分别作用在 $ds_0^2, ds_1^2, \cdots, ds_l^2$ 中的相似变換或运动群 $G^0, G^1, \cdots, G^l$ 的直积組成. 又为保証它是眞正的仿射变換群起見, $G^0, G^1, \cdots, G^l$ 中至少有一个是眞正的相似变換群[1].

这样, 我們就把 Riemann 空間仿射变換群的研究归結到相似群去, 又由相似变換群的空隙及容有較大参数相似群的 Riemann 空間的綫素容易得出仿射变換群的空間及容有較大参数仿射变換的 Riemann 空間的綫素.

下面我們再介紹 Riemann 空間的共形变換群.

設 Riemann 空間 V_n: $g_{ij}(x)dx^idx^j$ $(i, j=1, \cdots, n)$ 的单参数变換群 $\bar{x}^i=f^i(x, t)$ 使

$$g_{ij}(\bar{x})d\bar{x}^id\bar{x}^j=\rho(x, t)g_{ij}(x)dx^idx^j, \qquad (6\cdot 12\cdot 35)$$

則称它为单参数共形变換群. 我們容易証明单参数变換群 $\bar{x}^i=f^i(x, t)$ 为共形变換的充要条件是它的无穷小向量 ξ^i 满足

$$\xi_{i,j}+\xi_{j,i}=\psi(x)g_{ij} \quad \left(\psi(x)=\frac{d\rho}{dt}\bigg|_{t=0}\right). \qquad (6\cdot 12\cdot 36)$$

由共形变換群的定义可知相似变換群是一种特殊的共形变換群, 又将(6·12·36)代入(6·12·32)就可得出 ψ 为常数. 因而单参数变換群如既是共形变換群, 又是仿射变換群, 則必为相似变換群.

由 (6·12·35) 可以看出共形变換群的迷向群是相切欧氏空間的相似群, 并且与运动群的情形不同, 共形变換群的安定群与

[1] 見 Солодовников А. С. [1].

迷向群不一定同构,欧氏空間就是一例.

如果 Riemann 空間共形变换群在点 P 的迷向群是眞正的相似群(即 $\bar{x}^i=\sigma a^i_j x^j$, (a^i_j) 为直交陣, σ 为恒等于 1), 则称 P 为相似点. 当一点的迷向群为旋轉群时,称它为等长点. 因为不同的点的迷向群为相似的,所以容許可迁共形变换群的 Riemann 空間或者每点是相似点,或者每点是等长点.

我們現在来証明 Ishihara 与 Obata 的一个定理[1), 但限于 $n>3$ 时.

定理 7 容許可迁共形变换群的 Riemann 空間如有一相似点,則 V_n 是共形平坦空間.

所謂共形平坦空間是指在适当坐标下綫素具形状

$$ds^2=A(x)[(dx^1)^2+\cdots+(dx^n)^2],$$

当 $n>3$ 时,其特征为共形曲率張量等于 0, 而共形曲率張量为

$$C^h_{ijk}=R^h_{ijk}+\frac{1}{n-2}(\delta^h_j R_{ik}-\delta^h_k R_{ij}+g_{ik}R^h_j-g_{ij}R^h_k)$$

$$+\frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta^h_k g_{ij}-\delta^h_j g_{ik}).$$

为此,先要証明下述引理.

引理 n 維欧氏空間的 p 阶反变, q 阶共变的張量 $(p\neq q)$, 如果在一相似变换下不变,則此張量为零張量.

【証】 設 $\bar{x}^i=a^i_j x^j$ 为一相似变换,則成立

$$\sum_{i=1}^n a^i_j a^i_k=c^2\delta_{jk}\quad (j,\ k=1,\ \cdots,\ n),$$

其中 $c\neq 0$, $c\neq\pm 1$, 矩陣 (a^i_j) 的逆陣元素 $\tilde{a}^k_i=\frac{1}{c^2}a^i_k$, 且满足

$$\sum \tilde{a}^i_j\tilde{a}^k_j=\frac{1}{c^2}\delta_{ik}.$$

張量 $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ 在此变换下变为

1) 見 Obata M. and Ishihara S. [1].

$$\bar{T}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}=T^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q}a^{i_1}_{k_1}\cdots a^{i_p}_{k_p}\tilde{a}^{l_1}_{j_1}\cdots\tilde{a}^{l_q}_{j_q},$$

于是

$$\sum_{i,j}(\bar{T}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q})^2$$
$$=\sum(T^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q}a^{i_1}_{k_1}\cdots a^{i_p}_{k_p}\tilde{a}^{l_1}_{j_1}\cdots a^{l_q}_{j_q})(T^{m_1\cdots m_p}_{n_1\cdots n_q}a^{i_1}_{m_1}\cdots a^{i_p}_{m_p}\tilde{a}^{n_1}_{j_1}\cdots\tilde{a}^{n_q}_{j_q})$$
$$=c^{2(p-q)}\sum_{i,j}(T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q})^2.$$

設 $p\neq q$，且 $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ 在这相似变换下不变，即

$$\bar{T}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}=T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q},$$

就得到

$$(c^{2(p-q)}-1)\sum(T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q})^2=0.$$

由于 $c\neq\pm1$，$p\neq q$，我們就有

$$T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}=0,$$

引理証毕.

由于 V_n 的共形張量 C^i_{jkh} 是 1 阶反变，3 阶共变的張量，且在安定群下不变，就推出上述定理.

另一方面，当每点是等长点时，依 § 6·2 的討論显然就有

定理 8 設 Riemann 空間容許可迁共形变换群 G_r，且每点为等长点，则必可作一 Riemann 空間 $\bar{V}_n$ 共形于 V_n，而以 G_r 为其运动群.

因而 Riemann 空間的可迁共形变换群或者是欧氏空間的共形变换群，或者可作为一 Riemann 空間的运动群，这二者間有公共部分. 并且与定理 4 类似地可証明，任何变换群如可作为 Riemann 空間的不可迁共形变换群，就必可作为 Riemann 空間的运动群(見胡和生[2]). 这样，我們就把共形变换群归結到运动群及欧氏空間可迁共形变换群.

从本节和上一节的論述看来，可以得出結論：在 Riemann 空間中的相似、共形、仿射变换群和不可迁运动群的研究几乎一概可以归結为齐性 Riemann 空間的研究.

第七章　对称 Riemann 空間

§7·1 定　义

对称 Riemann 空間是很重要的一类齐性空間，它具有很丰富的几何学内容，并和李群，李代数的一些根本性质有着十分緊密的联系．我們在这里簡单地叙述对称 Riemann 空間的一些最基本的局部性质．詳細的内容和深入的討論見 Cartan E.[3], Helgason S.[1].

我們从李代数的研究开始，先定义李代数 G' 的对合自同构．和前面一章一样，我們所研究的是实数域上的李代数．

定义 1　設 σ 为李代数 G' 到自身的一个同构，又滿足 $\sigma^2=I$，这里 I 表示恒等变换，那末就称 σ 为李代数 G' 的对合自同构．

从这个定义出发，我們来定义对称 Riemann 空間．

定义 2　設有齐性 Riemann 空間 G/H，如果群 G 的李代数 G' 容有对合的自同构 σ，而 σ 不变元素的集合恰为子群 H 的李代数 H'，那末这个齐性 Riemann 空間就称为对称 Riemann 空間，或簡称为对称空間．

先导出对称空間的 Cartan-Maurer 方程，从此可以推出对称空間的許多特性.

我們已經知道，齐性 Riemann 空間是化約的齐性空間，依据 Cartan 数量积，在 G' 中子代数 H' 有正交补 K'，而且作为綫性空間来說，G' 分解为 H' 和 K' 的直和. 因此，我們可以选取李代数 G' 的基

$$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n,\ X_{n+1},\ \cdots,\ X_r,$$

使得

$$X_i \in K' \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$
$$X_\lambda \in H' \quad (\lambda=n+1,\ \cdots,\ r).$$

前已見到 X_i 可以視为在 G/H 中一个定点的切向量，因为对合自同构 σ 不改变 H'，也不改变 Cartan 数量积，所以也不改变 K'，因此，除了依定义 1 应有

$$\sigma X_\lambda = X_\lambda \tag{7·1·1}$$

之外，还应成立

$$\sigma X_i = a_i^j X_j,$$

式中 $A=(a_i^j)$ 为非异方陣，且满足 $A^2=E$. 因此矩陣 A 的特征値只能为 ± 1. 但如 A 有特征值 $+1$，那末 K' 中就有元素 X，使得

$$\sigma X = X.$$

但依定义，在 H' 之外的元素不能滿足这一条件，所以 A 的特征值只能是 -1，因此在适当的基之下，A 可写成为

$$A=\begin{pmatrix} -1 & & & * \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix},$$

式中主对角綫以下的元素为 0，又 * 代表未写出的元素. 注意

到 $A^2=E$，經过直接的計算可見，* 所代表的元素必須为 0，因而对 K' 中元素 X，成立 $\sigma X=-X$. 特別对基 $X_1, \cdots, X_n$，成立

$$\sigma X_i=-X_i. \qquad (7\cdot1\cdot2)$$

依据化約空間的性质，写出李代数中的換位运算关系

$$[X_i, X_j]=c_{ij}^k X_k+c_{ij}^\lambda X_\lambda,$$
$$[X_i, X_\lambda]=c_{i\lambda}^j X_j,$$
$$[X_\lambda, X_\mu]=c_{\lambda\mu}^\rho X_\rho.$$

利用 σ 为自同构，成立

$$[\sigma X_\alpha, \sigma X_\beta]=c_{\alpha\beta}^\gamma \sigma X_\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma=1, 2, \cdots, r).$$

又依据 (7·1·1)，(7·1·2) 可見 $c_{ij}^k=0$，因而成立

$$[X_i, X_j]=c_{ij}^\lambda X_\lambda, \quad [X_i, X_\lambda]=c_{i\lambda}^j X_j, \quad [X_\lambda, X_\mu]=c_{\lambda\mu}^\nu X_\nu. \qquad (7\cdot1\cdot3)$$

这便是表示对称空間的李代数的結构的方程. 因为我們所討論的是齐性 Riemann 空間，所以还可以适当地选取 X_i，使 $c_{i\lambda}^j$ 关于 i, j 为反称的.

相反地，如果齐性 Riemann 空間运动群的李代数可选取一組基，使 X_λ 属于迷向群的李代数，又成立 (7·1·3) 式，那末由 (7·1·1)，(7·1·2) 所定义的綫性变换显然为对合自同构，而这一对合自同构的不变元素的集合恰为迷向群的李代数 H'，因此空間为对称空間.

写出群的 Cartan-Maurer 方程(見第六章)，我們有

$$\left.\begin{aligned} D\omega^i&=c_{j\lambda}^i[\omega^j, \omega^\lambda], \\ D\omega^\lambda&=\frac{1}{2}c_{jk}^\lambda[\omega^j, \omega^k]+\frac{1}{2}c_{\mu\nu}^\lambda[\omega^\mu, \omega^\nu]. \end{aligned}\right\} \qquad (7\cdot1\cdot4)$$

所以得到

定理 1 齐性 Riemann 空間为对称空間的充要条件是：可

选取空間的运动群的微分算子的基使得 (7·1·3) 式成立，其中 X_λ 是某一点的安定群的李代数的基，或者是，运动群的 Cartan-Maurer 方程可以写成为 (7·1·4) 的形状，式中 $\omega^i=0$ 相应于某一个点的安定群.

現在我們考察对称空間的一个最初等的性质. 設对称空間的迷向群为可約，适当选取初始标形的基，我們就可得到

$$c^{i_1}_{j_2\lambda}=c^{i_2}_{j_1\lambda}=0 \quad \left(\begin{array}{l} i_1,\ j_1=1,\ \cdots,\ q, \\ i_2,\ j_2=q+1,\ \cdots,\ n \end{array}\right),$$

因而 (7·1·4) 式的前一部分可写作

$$D\omega^{i_1}=c^{i_1}_{j_1\lambda}[\omega^{j_1},\ \omega^\lambda],\quad D\omega^{i_2}=c^{i_2}_{j_2\lambda}[\omega^{j_2},\ \omega^\lambda].$$

由此可見，空間的綫素为

$$ds^2=ds_1^2+ds_2^2, \tag{7·1·5}$$

式中

$$ds_1^2=\sum_{i_1=1}^{q}(\omega^{i_1})^2,\quad ds_2^2=\sum_{i_2=q+1}^{n}(\omega^{i_2})^2. \tag{7·1·6}$$

利用前一章中已用到过的 Cartan 的引理，可以見到 ds_1^2 和 ds_2^2 各为 q 維和 $n-q$ 維 Riemann 空間的綫素. 如取 x^{i_1} 为方程 $\omega^{i_2}=0$ 的 q 个独立的初积分，那末 ds_1^2 只依賴于 x^{i_1} 和 dx^{i_1}. 同样，ds_2^2 只依賴于 x^{i_2} 和 dx^{i_2}，这里的 x^{i_2} 为方程 $\omega^{i_1}=0$ 的 $n-q$ 个独立的初积分. 現証明 ds_1^2 和 ds_2^2 均为对称 Riemann 空間的綫素. 为此，我們考察 ds_1^2. 考察矩陣的集合 $C_\lambda=(c^{i_1}_{j_1\lambda})$，在其中选取一部分 C_{λ_1} (不妨設 $\lambda_1=n+1,\ \cdots,\ n+r_1$)，使得它們綫性无关，又其他的 C_λ 可視为这些 C_{λ_1} 的綫性組合，即

$$C_{\lambda_2}=a^{\lambda_1}_{\lambda_2}C_{\lambda_1}\quad (\lambda_2=n+r_1+1,\ \cdots,\ n+r_2),$$

式中 $a^{\lambda_1}_{\lambda_2}$ 为适当的常数. 因此

$$D\omega^{i_1}=c^{i_1}_{j_1\lambda_1}[\omega^{j_1},\ \overline{\omega}^{\lambda_1}], \tag{7·1·7}$$

式中

$$\overline{\omega}^{\lambda_1}=\omega^{\lambda_1}+a^{\lambda_1}_{\lambda_2}\omega^{\lambda_2}.$$

重新記 $\overline{\omega}^{\lambda_1}=\omega^{\lambda_1}$，那末 Pfaff 式 ω^{i_1} 的特征系統为 $\omega^{i_1}=0$，$\omega^{\lambda_1}=0$. 設这一系統的一組独立初积分为 x^{i_1}，u^{λ_1}，那末 ω^{i_1} 能用 x^{i_1}，u^{λ_1}，dx^{i_1} 来表示，由于 ω^{λ_1} 能由 ω^{i_1} 依方程 $D\omega^{i_1}=c^{i_1}_{j_1\lambda_1}[\omega^{j_1},\ \omega^{\lambda_1}]$ 所唯一决定，所以 ω^{λ_1} 也可单用 x^{i_1}，u^{λ_1} 及其微分表示. 因为 ω^{λ_1} 为 ω^{λ} 的常系數綫性組合，利用(7·1·4)第二部分就可見到

$$D\omega^{\lambda_1}=\frac{1}{2}\,c^{\lambda_1}_{j_1k_1}\,[\omega^{j_1},\ \omega^{k_1}]+\frac{1}{2}\,c^{\lambda_1}_{\mu_1\nu_1}[\omega^{\mu_1},\ \omega^{\nu_1}]^{1)}\ .\qquad(7\cdot1\cdot8)$$

依据(7·1·7)和(7·1·8)式，又利用定理 1 便可知道，ds_1^2 为一对称空間的綫素，同理，ds_2^2 也为一对称空間的綫素，因此得到

定理 2 如果对称空間的迷向群为可約的，那末这一对称空間便是两个对称空間的乘积空間.

根据这一定理，我們只要研究迷向群为不可約的对称空間就可以了. 这样的对称空間称为不可約的对称空間.

欧氏空間为对称空間的一个平凡的例子，因为它容許 Abel 群为移动群，它是可約的，实际上它分解为一維的空間的直和. 在下一节中我們将看到，常曲率空間也是对称空間的一种，当曲率不为 0 时，它是不可約的.

§ 7·2 对称空間的几何性质

設对称空間的运动群的微分算子已取好，使(7·1·3)式能够成立，又設 X_λ 为一点 P_0:(0, 0, …, 0) 的安定群的算子. 記

$$X_i=\xi^j_i(x)\,\frac{\partial}{\partial x^j},\qquad(7\cdot2\cdot1)$$

作常微分方程組

$$\frac{d\overline{x}^i}{dt}=c^j\xi^i_j(\overline{x}).\qquad(7\cdot2\cdot2)$$

---

1) 見 § 5·4 注 2.

以 $t=0$, $\bar{x}^i=0$ 为初始条件作这一方程組的解 $\bar{x}^i=f^i(t, c)$. 我們要証，对任何常数 c, $\bar{x}^i=f^i(t, c)$ 为空間的測地綫. 由于 X_i 可以用它們的常系数綫性組合来代替，我們不妨对 $c^i=\delta^i_1$ 来証明这一事实. 这时，由 X_1 所产生的变换相当于由子群

$$\omega^2=\cdots=\omega^n=\omega^{n+1}=\cdots=\omega^r=0 \qquad (7\cdot2\cdot3)$$

所定义的单参数群. 在这个群下，初始标形变化为一个单参数的标形族. 在这族标形之間的变位方程为

$$dP=\omega^1 e_1, \quad de_i=0. \qquad (7\cdot2\cdot4)$$

这因为，对于对称空間而言，前章中的 ω_i^j 的表达式 $(6\cdot2\cdot16)$ 化为

$$\omega_i^j=c_{i\lambda}^j\omega^\lambda, \qquad (7\cdot2\cdot5)$$

对所論子群而言，$\omega_i^j=0$. $(7\cdot2\cdot4)$表示：在这个单参数变换群下，从初始标形出发的单参数标形族为相互平行推移的，而且标形的原点的軌綫保持和向量 e_1 相切，因此标形的原点的軌綫的切綫相互平行，所以是測地綫. 因点 P_0 可任意选取，所以有

定理 1 对称空間中任給一点 P 及任一个过 P 点的方向 l，必存在空間的一个单参数运动群，它的过 P 点的軌綫和 l 相切，又为測地綫.

利用方程$(7\cdot2\cdot2)$的解 $\bar{x}^i=f^i(t, c)$ 可以得到空間的关于点 P_0 的法坐标. 事实上，令 $y^i=tc^i$, 容易見到

$$f^i(t, c)=\varphi^i(y),$$

式中的 φ^i 为适当的函数，且 $\det\left|\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^j}\right|$ 在 $y^i=0$ 时不为 0. 因此可以用 y^i 来作新的坐标，在这一坐标下，測地綫的方程就是

$$y^i=c^i t. \qquad (7\cdot2\cdot6)$$

这表示，y^i 就是法坐标.

現考察对称空間的張量的特征. 我們要証明

定理 2 Riemann 空間 V_n 为对称空間的充要条件是

$$R^i_{jkl|h}=0. \tag{7·2·7}$$

这里我們仍用 R^i_{jkl} 記空間的曲率張量，記号“$|h$”表示它的相应的共变导数。

先設 V_n 为对称的，依前一章的討論，幷根据(7·1·4)式知道

$$\omega^i_j=c^i_{j\lambda}\omega^\lambda, \tag{7·2·8}$$

因而不难算得

$$D\omega^i_j-[\omega^k_j,\ \omega^i_k]=\frac{1}{2}c^i_{j\lambda}c^\lambda_{kl}[\omega^k,\ \omega^l],$$

所以，参考于可容許标形，

$$R^i_{jkl}=c^i_{j\lambda}c^\lambda_{kl}. \tag{7·2·9}$$

因为 R^i_{jkl} 为迷向群的不变張量，所以也成立

$$R^h_{jkl}c^i_{h\lambda}-R^i_{hkl}c^h_{j\lambda}-R^i_{jhl}c^h_{k\lambda}-R^i_{jkh}c^h_{l\lambda}=0. \tag{7·2·10}$$

(当然，这个式子也可以利用 Jacobi 恒等式直接驗証。) 由(7·2·8)，(7·2·9) 可知

$$DR^i_{jkl}=R^h_{jkl}c^i_{h\lambda}\omega^\lambda-R^i_{hkl}c^h_{j\lambda}\omega^\lambda-R^i_{jhl}c^h_{k\lambda}\omega^\lambda-R^i_{jkh}c^h_{l\lambda}\omega^\lambda.$$

根据(7·2·10)就知道 $DR^i_{jkl}=0$，因此也就推出了(7·2·7)式。

現在要証明相反的事項，卽假設对一 Riemann 空間 V_n，(7·2·7)式成立，而要証明它是对称空間。

为此，在 V_n 中选一点 O 及 O 点的一个直交标形 T_0，从这个标形出发，沿一切可能的路徑作平行移动，得到这空間的一族标形，我們称这族标形为平行可达的标形族。假設这种标形依賴于参数 $(x^i,\ u^\lambda)$[1]，x^i 为标形原点的坐标，当 x^i 固定时，u^a 可視为該点的和乐群的参数。这族标形的变位方程記为

$$dP=\breve{\omega}^i e_i,\quad de_i=\breve{\omega}^j_i e_j, \tag{7·2·11}$$

式中 $\breve{\omega}^i$, $\breve{\omega}^j_i$ 为 $(x^i,\ u^\lambda)$ 的 Pfaff 式。这时也成立方程

[1] 我們不去严格地討論这一事項成立的依据。这里特別还要假定依賴关系有一定的可微分性。

$$D\breve{\omega}^i=[\breve{\omega}^j,\ \breve{\omega}_j^i],\quad D\breve{\omega}_j^i=[\breve{\omega}_j^k,\ \breve{\omega}_k^i]+\frac{1}{2}R_{jkl}^i[\breve{\omega}^k,\ \breve{\omega}^l].\ (7\cdot2\cdot12)$$

設 T 和 T' 为两个邻近的标形，T' 的原点为 P. 可把 T' 平行移动为 T''，使 T'' 和 T 有同一原点. T'' 和 T 均为平行可达标形，且为邻近的标形，所以从 T'' 到 T 的变差为和乐群中的无穷小变换所生成的变差. 但 T'' 和 T 的变差就是标形 T' 到标形 T 的变差，所以 T' 和 T 的变差可用 P 点和乐群的无穷小变换来描述. 再选取一路徑 l，沿此 l 可将初始标形 T_0 平行移动为 T，这时 T'' 为某一标形 T_0'' 沿 l 平行移动而得到，T_0'' 必属于可达标形族. 从 T_0'' 到 T_0 的变差符合于从 T'' 到 T 的变差，而 T_0'' 到 T_0 的变差属于 O 点的和乐群，因此，如果把参考于标形 T_0 的 O 点的和乐群的綫性李代数的基取为

$$C_\lambda=(c_{j\lambda}^i),\qquad (7\cdot2\cdot13)$$

那末从 T 到 T' 的变位（参考于标形 T）中的 $\breve{\omega}_j^i$ 有表达式

$$\breve{\omega}_j^i=c_{j\lambda}^i\theta^\lambda\quad(c_{j\lambda}^i+c_{i\lambda}^j=0),\qquad (7\cdot2\cdot14)$$

这里的 θ^λ 是 x^i, u^λ 的 Pfaff 式. θ^λ 应該和 $\breve{\omega}^i$ 构成一組独立的 Pfaff 式，否則，和乐群的参数便要减少.

利用 $\breve{\omega}_j^i$ 的表达式，由(7·2·12)第一部分和(7·2·14)可見

$$D\breve{\omega}^i=c_{j\lambda}^i[\breve{\omega}^j,\ \theta^\lambda].$$

从 (7·2·12) 的第二部分还可見到

$$Dc_{j\lambda}^i\theta^\lambda=c_{j\lambda}^iD\theta^\lambda$$

$$=\frac{1}{2}(c_{j\mu}^kc_{k\nu}^i-c_{j\nu}^kc_{k\mu}^i)[\theta^\mu,\ \theta^\nu]+\frac{1}{2}R_{jkl}^i[\breve{\omega}^k,\ \breve{\omega}^l].$$

由于 C_λ 构成一綫性李代数的基，所以存在常数 $c_{\mu\nu}^\lambda$，使能成立

$$c_{j\mu}^hc_{h\nu}^i-c_{j\nu}^hc_{h\mu}^i=c_{\nu\mu}^\lambda c_{j\lambda}^i,$$

因此我們就有

$$c^i_{j\lambda}\left\{D\theta^\lambda-\frac{1}{2}c^\lambda_{\mu\nu}[\theta^\mu,\ \theta^\nu]\right\}=\frac{1}{2}R^i_{jkl}[\tilde{\omega}^k,\ \tilde{\omega}^l].$$

从这一方程可以見到

$$R^i_{jkl}=c^i_{j\lambda}c^\lambda_{kl}.$$

由于假設 R^i_{jkl} 的共变导数为 0，所以在平行移动中它不发生变差，在平行可达标形中，它保持为常数，所以 c^λ_{kl} 必为常数．因而得到 $\tilde{\omega}^i$, θ^λ 能滿足如下的关系式：

$$D\tilde{\omega}^i=c^i_{j\lambda}[\tilde{\omega}^j,\ \theta^\lambda],\quad D\theta^\lambda=\frac{1}{2}c^\lambda_{jk}[\tilde{\omega}^j,\ \tilde{\omega}^k]+\frac{1}{2}c^\lambda_{\mu\nu}[\theta^\nu,\ \theta^\mu].$$

这表示 $\tilde{\omega}^i$, θ^λ 构成一个群的不变形式組，从(7·2·11)可以見到，V_n 的平行可达标形族就符合于这一个群的可容許标形族．又因

$$ds^2=\sum_i(\tilde{\omega}^i)^2,$$

所以这群就是空間 V_n 的运动群，根据 § 7·1 定理 1 就見到：空間 V_n 为对称的．定理証毕．

从此还可得到

推論 对称空間容許一运动群，使迷向群与和乐群相一致．

現定义对称变換．

定义 設 P 为 Riemann 空間中的一点 P_0，設 Q 为空間任一点[1]．作連 P_0 和 Q 的唯一的測地綫 P_0Q，把这一測地綫向 P_0 的另一側延长，在其上取点 Q'，使 $Q'P_0$ 的弧长等于 P_0Q 的弧长，那末，映象

$$\tau Q=Q'$$

称为关于点 P_0 的对称变換．

要証明下述的重要事实．

定理 3 Riemann 空間 V_n 为对称空間的充要条件是：空間

[1] 严格地說来，应該是在 P 的某一适当小的邻域中的点．

中的对称变换为等长变换.

先設 V_n 为对称空間. P_0 为 V_n 的任一点, 在 P_0 点任选一直交标形为初始标形,那末可决定出算子 $X_1,\cdots,X_r$, 使得 $X_1,\cdots, X_n$ 对应于从 P_0 点出发的 n 个直交单位向量, 而且它們所决定的过 P_0 点的运动的軌綫是过 P 点的測地綫. 又 $X_{n+1},\cdots, X_r$ 为 P 点的安定群的微分算子, 群的一般变换可由

$$\frac{d\bar{x}^i}{dt}=c^j\xi^i_j(\bar{x})+c^\lambda\xi^i_\lambda(\bar{x})$$

所产生. $u^i=c^it$, $u^\lambda=c^\lambda t$ 可視为群的法坐标, 从此可得出可容許标形族(以 P_0 点的已取好的标形为初始标形), 且成立

$$dP=\omega^i(u, du)e_i, \quad de_i=\omega^j_i(u, du)e_j.$$

如取坐标系統, 使得相应于 $u^i=v^i$, $u^\lambda=0$ 的标形的原点以 u^i 为坐标, 因这时 $c^\lambda=0$, 所以它就是 P_0 点的法坐标. 因此对称变換卽为

$$\bar{u}^i=-u^i.$$

因为依据 P_0 可以作对合自同构 σ, 使

$$\sigma X_i=-X_i, \quad \sigma X_\lambda=X_\lambda,$$

所以我們有

$$\sigma u^i=-u^i, \quad \sigma u^\lambda=u^\lambda.$$

因此也有

$$\begin{aligned}&\omega^\alpha(-u^i, u^\lambda; -du^i, du^\lambda)\\&\quad=\omega^\alpha(u^i, u^\lambda; du^i, du^\lambda) \quad (\alpha=1, 2, \cdots, r).\end{aligned} \tag{7·2·15}$$

特别, 当 $u^\lambda=0$, $\alpha=i$ 时, 我們有

$$\omega^i(-u^j, 0; -du^j)=\omega^i(u^j, 0; du^j). \tag{7·2·16}$$

因为空間的綫素可表为

$$ds^2=\sum_{i=1}^n[\omega^i(u^j, 0; du^j)]^2, \tag{7·2·17}$$

所以由 (7·2·16) 立即可以見到关于 P_0 点的对称变换卽为等长的. 由于 P_0 是任意选取的一点, 所以对称空間关于任意一点的对称都是等长的变换.

相反地, 如有一个 Riemann 空間 V_n 对每点的对称均为等长, 那末, 我們在空間中任取一点 P_0, 作关于 P_0 的法坐标 x^i, 对称变换这时取形式

$$\bar{x}^i = -x^i. \qquad (7\cdot2\cdot18)$$

依假設, 它是一个等长的变换. 又張量 $R_{ijkh|l}$ 也应該在这一变換下不变, 特别, 这一張量在 P_0 的值应满足

$$R_{ijkl|h} = -R_{ijkl|h},$$

因此, 在 P_0 点 $R_{ijkl|h}=0$. P_0 为任意点, 所以在 V_n 中的每点均有 $R_{ijkl|h}=0$. 依据定理 4 就知道 V_n 为对称空間.

在本节結束时, 我們还要証明

定理 4　設 G/H 为非欧氏的不可約的对称空間, 那末群 G 必为半单純的.

我們計算不可約对称空間的数量积, 由于 $(c^j_{i\lambda})$ 构成迷向群的李代数的基, 所以

$$c^i_{j\lambda} c^j_{i\mu} = a_{\lambda\mu} \qquad (7\cdot2\cdot19)$$

为迷向群的伴随綫性群的不变張量(見 § 5·4 定理 2 的証明). 又二次型 $a_{\lambda\mu}e^\lambda e^\mu$ 必須为負定的, 因可通过 $(c^j_{i\lambda})$ 的选取而把 $a_{\lambda\mu}$ 化为对角形, 利用 $c^i_{j\lambda} = -c^j_{i\lambda}$, 且对固定的 λ, $c^i_{j\lambda}$ 不全为 0, 所以

$$a_{\lambda\lambda} = c^i_{j\lambda} c^j_{i\lambda} < 0. \qquad (7\cdot2\cdot20)$$

选取适当的 $(c^j_{i\lambda})$ 之后, 可取 $a_{\lambda\mu} = -\delta_{\lambda\mu}$. 因为迷向群的綫性伴随群的基为 $E_\lambda = (c^\nu_{\mu\lambda})$, 所以 $c^\nu_{\mu\lambda}$ 关于三个指标均为反称, 因而二次型 $b_{\lambda\rho}e^\lambda e^\rho = c^\nu_{\mu\lambda} c^\mu_{\nu\rho} e^\lambda e^\rho$ 为非正的. 因而, 不論在什么基下面, 二次型

$$G_{\lambda\mu}e^\lambda e^\mu = a_{\lambda\mu}e^\lambda e^\mu + b_{\lambda\mu}e^\lambda e^\mu$$

为負定的，因此可重新取基 $(c_{i\lambda}^{j})$，使

$$G_{\lambda\mu}=c_{i\lambda}^{j}c_{j\mu}^{i}+c_{\nu\lambda}^{\rho}c_{\rho\mu}^{\nu}=-\delta_{\lambda\mu}. \qquad (7\cdot2\cdot21)$$

又考察

$$G_{ij}=c_{\beta i}^{\alpha}c_{\alpha j}^{\beta}=c_{\lambda i}^{k}c_{kj}^{\lambda}+c_{ki}^{\lambda}c_{\lambda j}^{k}, \qquad (7\cdot2\cdot22)$$

式中 α, β 記 1, 2, …, r，而第二个等号由(7·1·3)得出.

依(7·2·9)式可見

$$R_{ij}=R_{ijk}^{k}=c_{i\lambda}^{k}c_{jk}^{\lambda}, \qquad (7\cdot2\cdot23)$$

因 Ricci 張量 R_{ij} 关于 i, j 为对称，所以就見到

$$G_{ij}=-2R_{ij}. \qquad (7\cdot2\cdot24)$$

因 R_{ij} 为运动群的不变張量，所以 R_{ij} 必須在迷向群下为不变，因迷向群为不可約，所以有

$$G_{ij}=-2R_{ij}=-c\delta_{ij}, \qquad (7\cdot2\cdot25)$$

于此 c 为常数．再注意到，由(7·1·3)的形狀可推出

$$G_{i\lambda}=c_{\beta i}^{\alpha}c_{\alpha\lambda}^{\beta}=0. \qquad (7\cdot2\cdot26)$$

因此群 G 的 Cartan 二次型可写成为

$$G_{\alpha\beta}e^{\alpha}e^{\beta}=-c[(e^{1})^{2}+\cdots+(e^{n})^{2}]-[(e^{n+1})^{2}+\cdots+(e^{r})^{2}]. \qquad (7\cdot2\cdot27)$$

因为 Cartan 数量积在綫性伴随群下为不变，所以还成立

$$G_{\alpha\gamma}c_{\beta\delta}^{\gamma}+G_{\gamma\beta}c_{\alpha\delta}^{\gamma}=0.$$

在这式中取 $\delta=j$, $\alpha=\mu$, $\beta=k$，我們就得到

$$-c_{kj}^{\mu}-cc_{\mu j}^{k}=0,$$

这就是

$$c_{kj}^{\mu}=-cc_{\mu j}^{k}. \qquad (7\cdot2\cdot28)$$

从此可見，如果 $c=0$，那末 $c_{kj}^{\mu}=0$，从此再由(7·2·9)得到 $R_{ijkl}=0$，因此空間必为欧氏的．所以对非欧氏的不可約的对称空間，必須有 $c\neq0$，因而 Cartan 度量不退化，故 G 为半单純的．

§7·3 不可約的对称空間

我們继續討論不可約的对称空間．我們要証明

定理 1 迷向群不可約的齐性 Riemann 空間，如果运动群幷非单純群，那末空間一定是对称的．

先討論运动群非为半单純的情形．这时群的李代数 G' 必有可換的理想子代数 R'，它不可能完全包含在一点的安定群的子代数內，因此可选基 $X_1, \cdots, X_q, X_{q+1}, \cdots, X_n, X_{n+1}, \cdots, X_{n+s}, X_{n+s+1}, \cdots, X_r$，而 $X_1, \cdots, X_q, X_{n+1}, \cdots, X_{n+s}$ 为 R' 的基 $(q\neq 0)$，$X_{n+1}, \cdots, X_r$ 为一点的安定群的微分算子的基．这时，設 $a=1, 2, \cdots, q$; $\lambda=n+1, \cdots, r$，則 $[X_a, X_\lambda]$ 只能表示 $X_1, \cdots, X_q$ 和 $X_{n+1}, \cdots, X_r$ 的綫性組合，因之有

$$c_{a\lambda}^{p}=0 \quad (a=1, 2, \cdots, q; p=q+1, \cdots, n). \qquad (7\cdot 3\cdot 1)$$

如 $q<n$，这表示迷向群有非平凡的不变平面，这和迷向群不可約相矛盾，因之 $q=n$．这时 $X_1, \cdots, X_n$ 本身为可換的算子，空間容許可換的单純可迁群，这时空間 V_n 显然就是欧氏空間，可归入于对称空間．

再考察李代数 G' 为半单純而不为单純的情况．那末 G' 就分为一些单純的理想子代数的直和

$$G'=G_1'\dot{+}G_2'\dot{+}\cdots\dot{+}G_s' \quad (s\geqslant 2), \qquad (7\cdot 3\cdot 2)$$

式中 $G_1', \cdots, G_s'$ 都不是一維的，每一个 $G_h'(h=1, 2, \cdots, s)$ 都不能属于 H'，否則 H' 中就包含了 G' 的理想子代数，这是不可能的．設 L_h' 为 G' 中包含 H' 和 G_h' 的最小的平面，因为

$$[H', H']\subseteq H', \quad [G_h', G_h']\subseteq G_h', \quad [H', G_h']\subseteq G_h', \qquad (7\cdot 3\cdot 3)$$

所以 L_h' 为子代数．因为 H' 不包含 G' 的非平凡理想子代数，L_h' 不能合于 H'，又 L_h' 必須和 G' 相符合，否則依第五章所論，运动群为非素性的，迷向群就有不变平面，这是不可能的．

現証 $s=2$. 設 $X_1\in G'_1$, $X_1\neq 0$, 由于 $L'_2=G'$, 所以存在 G'_2 中的元素 X_2 和 H' 中的元素 Y, 使 $X_1=X_2+Y$. Y 必为非零元素, 否則 X_1 就为 G'_1, G'_2 的公共元素, 因之为零元素, 和所設矛盾. 如果 $s>2$, 則存在着 G'_3, 而

$$[Y,\ G'_3]=[X_2-X_1,\ G'_3]=0,$$

又显然 $[Y,\ H']\subseteq H'$, 因此

$$[Y,\ G']=[Y,\ L'_3]=[Y,\ G'_3+H']\subseteq H'.$$

这表示在 H' 中存在非零元素 Y, 它所对应的伴随綫性群的元素在相切空間中誘导了零元素, 这是不可能的. 因此必有 $s=2$.

再証 G'_1 和 G'_2 同构. 設 $Z_1,\ \cdots,\ Z_p$ 为 G'_1 的基, 則在 G'_2 中存在元素 $W_1,\ \cdots,\ W_p$ 使

$$W_1=Y_1+Z_1,\ W_2=Y_2+Z_2,\ \cdots,\ W_p=Y_p+Z_p, \tag{7·3·4}$$

式中 $Y_1,\ \cdots,\ Y_p$ 为 H' 中的元素. G'_2 中的元素 $W_1,\ \cdots,\ W_p$ 必为綫性无关的, 为証明这一点, 設有 $a^\mu W_\mu=0\ (\mu=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$, 因而

$$-a^\mu Y_\mu=a^\mu Z_\mu, \tag{7·3·5}$$

但如果令 $H'\cap G'_1=K'$, 那末

$$[K',\ H']\subseteq K',$$

故 K' 为 H' 的理想子代数. 因 H' 为紧致李代数, 故 H' 可分为两个理想子代数的直和, 即

$$H'=K'\dot{+}L', \tag{7·3·6}$$

式中 L' 也为 H' 的理想子代数, 因 $[K',\ G'_2]=0$, 所以相应于 K' 的綫性伴随群中元素使切空間中某些向量保持不变. 設 N 为这些向量的全体所成的平面, 其維数必小于 n (否則迷向群和安定群不同构, 对 Riemann 空間来說, 这是不可能的). 因 L' 和 K' 可交換, 容易見到, N 也为 L' 的不变平面, 这就和迷向群为不可約发生矛盾, 所以 $K'=0$, 即 H' 和 G'_1 沒有非零的公共

元素．因此由(7·3·5)式得出 $a^{\mu}=0$．所以 G_2' 的維数不低于 G_1' 的維数，同样的理由說明 G_1' 的維数也不低于 G_2' 的維数，所以这两个理想子代数有相同的維数，并且分別可取 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_p$ 和 $W_1, W_2, \cdots, W_p$ 为它們的基．

現設

$$[Z_a, Z_b]=c_{ab}^c Z_c, \quad [W_a, W_b]=\bar{c}_{ab}^c W_c \quad (a, b, c=1, 2, \cdots, p), \tag{7·3·7}$$

那末由 (7·3·4) 可見

$$[Y_a, Z_b]=-c_{ab}^c Z_c,$$
$$[Y_a, W_b]=\bar{c}_{ab}^c W_c=\bar{c}_{ab}^c Z_c+\bar{c}_{ab}^c Y_c.$$

因 Z_b 和 W_b 关于 H' 属于同一等价类，又 H' 为子代数，所以

$$[Y_a, Z_b-W_b]\in H',$$

因此

$$(c_{ab}^c+\bar{c}_{ab}^c)Z_c\in H'.$$

因为已証 G_1' 和 H' 只有零元素相公共，所以

$$c_{ab}^c=-\bar{c}_{ab}^c. \tag{7·3·8}$$

所以对应

$$Z_a\to -W_a \quad (a=1, 2, \cdots, p) \tag{7·3·9}$$

生成了李代数 G_1' 和 G_2' 的同构．

因为 H' 和 G_1' 的交集只为零元素，所以 H' 的維数不超过 p．又 $Y_a(a=1, 2, \cdots, p)$ 也必須綫性无关，这因为，如成立 $c^aY_a=0$，那末就有

$$c^aZ_a=c^aW_a,$$

因 G_1' 和 G_2' 的公共元素只有零元素，所以 $c^a=0$．因此 H' 也为 p 維的．由于 Riemann 空間本身为 n 維的，所以 $p=n$．选取元素

$$X_i=Z_i-W_i, \quad X_{n+i}=Z_i+W_i \quad (i=1, 2, \cdots, n), \tag{7·3·10}$$

那末就成立

$$[X_i, X_j]=c_{ij}^k X_{n+k}, \quad [X_i, X_{n+j}]=c_{ij}^k X_k, \\ [X_{n+i}, X_{n+j}]=c_{ij}^k X_{n+k}, \tag{7·3·11}$$

由此就可見到空間为对称的. 定理1証毕.

因为 G_1', G_2' 和 H' 都同构, 而 H' 的李代数为紧致李代数, 所以 G' 实际上还是由两个同构的紧致单純李代数构成.

从此也可推出 E. Cartan 的

定理 2 設 G/H 为不可約的对称空間, 又 G 非为单純, 那末 G' 必为两个同构的紧致李代数的直和.

相反的事实也成立: 如果已給两个紧致的单純李代数, 又为同构的. 依定理1中所示的方法决定 X_i, X_{n+i}, 立即就可以作出一个对称空間, 这一空間显然也是不可約的, 否則所給的李代数的伴随綫性群也有不变平面, 它就是不可約的. 附带指出, 这时的对合自同构 σ 为

$$\sigma X_i=-X_i, \quad \sigma X_{n+i}=X_{n+i}. \tag{7·3·12}$$

除了上述类型的不可約对称空間外, 自然我們要考察对应于单純李代数的不可約对称空間.

依据 (7·2·27) 式, 当 $c>0$ 时, 李代数 G' 为紧致单純的, 当 $c<0$ 时, Cartan 度量非为正定, 由 G' 为单純, 它也不能使另一正定的二次型不变, 所以李代数 G' 为非紧致的. 我們要指出这两类对称空間之間的密切的联系. 先設想, 已給一非紧致李代数 G' 所对应的不可約的对称空間, 这就是說, 在 G' 中已确定了一个对合自同构 σ, 而在 G' 中可适当选取基 $X_1, \cdots, X_r$, 使能成立

$$[X_i, X_j]=c_{ij}^\lambda X_\lambda, \quad [X_i, X_\lambda]=c_{i\lambda}^j X_j, \\ [X_\lambda, X_\mu]=c_{\lambda\mu}^\nu X_\nu. \tag{7·3·13}$$

依据单純实李代数 G', 我們可以制作另一李代数, 它的过程是:

把 G' 复化，然后在复化的空間中取元素 $X'_i = iX_i$，以 X'_i 和 X_λ 为基，可重新定义出一个实的李代数 L'，其結构方程为

$$[X'_i,\ X'_j] = -c^\lambda_{ij}X_\lambda,\quad [X'_i,\ X_\lambda] = c^j_{i\lambda}X'_j,\quad [X_\lambda,\ X_\mu] = c^\nu_{\lambda\mu}X_\nu. \tag{7·3·14}$$

設这个李代数的 Cartan 度量为 $K_{\alpha\beta}e^\alpha e^\beta$，容易見到

$$G_{\lambda\mu} = K_{\lambda\mu},\quad G_{i\lambda} = K_{i\lambda},\quad G_{ij} = -K_{ij}.$$

因此 L' 的 Cartan 数量积为

$$c(e_1^2 + \cdots + e_n^2) - (e_{n+1}^2 + \cdots + e_r^2), \tag{7·3·15}$$

于此 c 为負数．因此 L' 为緊致李代数，对应一个不可約的对称空間，L' 必为单純李代数或两个单純李代数 G'_1 和 G'_2 的直和．所以非緊致李代数 G' 的不可約对称空間必对应于一个緊致李代数的对称空間．相反地，同样的步驟也可以由緊致李代数所对应的不可約对称空間导引到非緊致的李代数所对应的不可約对称空間．因此，从局部的观点来看，全部对称空間的决定归結到緊致李代数的不可約对称空間的决定．依上面的討論知道，当此李代数是半单純而非单純时，对称空間的結构已立即可作出，因此决定对称空間的問題归結为純粹是代数的問題——决定緊致单純李代数的所有的对合自同构的問題．这一問題已經得到了很好的解决，我們在此不去討論它，也不去叙述各个特殊的对称空間的种种情况，有兴趣的讀者可以参看有关专著．

最后我們还将指出一个尚未完全解决的問題，这就是：迷向群为不可約的齐性 Riemann 空間除对称空間而外还有哪些？从我們的討論可以看到，只要考察李代数 G' 为单純的情况就可以了．因为依定理 1，当 G' 非为半单純时，空間必为欧氏，又当 G' 为半单純而非为单純时，空間必为对称的．除此而外，E. Cartan 也已証明，当 G' 为非緊致的单純李代数时，空間也只能为对称的．所以剩下来只需討論 G' 为緊致单純李代数的情

形. 这一問題近来已經得到一定的研究, 已有相当的結果. 我們只指出, 迷向群不可約而非为对称的齐性 Riemann 空間还是很多的 (Мантуров О. В. [1], [2]), 但尙未完全决定好. 依据我們的第六章的討論, 决定这些空間对于决定所有的齐性 Riemann 空間是有着重要的意义的.

附　录

本书完全是从局部的微分几何学的观点来写的，讀者在具备了綫性代数和簡单的 Riemann 几何的知識以后就可閱讀这本书．但这样做也有一个很大的缺陷，这就是我們的論述，甚至定义本身不可避免地带有一些不够严密之处，在术語使用上也有一些地方可能会引起誤解，在附录中就想对此作若干补充說明．

首先对微分流形的意义作出說明(参看 De Rham [2])．

定义　設 M 是一个 Hausdorff 拓扑空間，它还具有如下的补充結构：存在有限个或可列个邻域 $U_1, U_2, \cdots, U_N, \cdots$，使能复盖 M，又对每一 U_N 均存在到 n 維欧氏空間某一开区域 S_N 的一个同胚

$$x=f_N(p), \quad x=(x^1, \cdots, x^n)\in S_N, \quad p\in U_N.$$

此外，对任意两个相交的 U_L, U_N，如把函数 $\bar{x}=f_L\{f_N^{-1}(x)\}$ 用笛卡儿坐标表示为

$$\bar{x}^i=\varphi^i(x^j),$$

而函数 φ^i 滿足条件

（i）所有的 φ^i 均为 C^r 的函数 $(r=1, 2, \cdots, \infty, \omega)$，

(ii) Jacobi 行列式 $\det\left|\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right| \neq 0$,

則称M为 n 維的 C^r 微分流形．所述的补充結构称为 C^r 微分結构．(i)中的 C^r 函数当 r 为正整数时是指具 r 阶連續导数的函数，C^∞ 是指具任意阶的連續导数的函数，C^ω 指解析函数，C^ω 流形通称为解析流形．$U_1, U_2, \cdots, U_N, \cdots$ 等称为基本坐标域．

在 C^r 微分流形上或其某一开集 Σ 上所定义的函数 $f(p)$ 可以在各点的适当的邻域表示为坐标的函数．設 p_0 为 $f(p)$ 的定义域中的一点，因基本坐标域复盖整个 M，所以 p_0 必属于某一 U_N，因此 $f(p)$ 在 $\Sigma\cap U_N$ 中可表示为坐标 $x^1, \cdots, x^n$ 的函数 $f(x^1, \cdots, x^n)$．如果在各个有关的坐标域中，所作的函数 f 均为 C^s 函数 $(s\leqslant r)$，那末称函数 $f(p)$ 为 C^s 的．

如果有一組函数

$$y^i=f^i(p),$$

定义域为 Σ，把 Σ 一对一地映照到欧氏空間的一个开区域上，而且在每一非空的 $U_N\cap\Sigma$，相应的函数

$$y^i=f^i(x^1, \cdots, x^n)$$

均属于 C^r，而且 $\det\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|\neq 0$，那末就称 Σ 为一 C^r 坐标域，y^i 为区域 Σ 的坐标．

容易証明，如 $V_1, \cdots, V_N, \cdots$ 为一組 C^r 坐标域，且 $M=\sum V_\lambda$，那末 $V_1, \cdots, V_N, \cdots$ 也具有定义中所說的基本坐标域 $U_1, \cdots, U_N, \cdots$ 的性质，我們称 $V_1, \cdots, V_N, \cdots$ 是和 $U_1, \cdots, U_N, \cdots$ 相等价的 C^r 坐标系．如用 $V_1, \cdots, V_N, \cdots$ 来代替定义中 $U_1, \cdots, U_N, \cdots$，我們仍然认为M具同一的微分結构．这就是，用等价的坐标系所定义出的微分流形是相同的．

微分流形的一个具体的例子是：設 $y^1, \cdots, y^{n+1}$ 为 $n+1$ 維欧氏空間 E_{n+1} 的笛卡儿坐标，設 $F(y^1, \cdots, y^{n+1})$ 为 $y^1, \cdots, y^{n+1}$

的 C^r 函数，又 M 为满足

$$F(y^1, \cdots, y^{n+1})=0$$

的点集(設为非空)，而在 M 的每一点上 $\frac{\partial F}{\partial y^1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial y^{n+1}}$ 不全为 0. 那末 M 就是一个 C^r 微分流形. 事实上，設 $P_0(y_0^1, y_0^2, \cdots, y_0^{n+1})$ 为 M 上的点，不妨設在 P_0 点 $\frac{\partial F}{\partial y^{n+1}} \neq 0$，因此在 E_{n+1} 中存在 P_0 点为心的一个开球 W，使得 M 在 W 中的点均能表示为

$$y^{n+1}=\varphi(y^1, \cdots, y^n),$$

且 $\frac{\partial F}{\partial y^{1+1}} \neq 0$，不妨把 $y^1, \cdots, y^n$ 的变化范圍限制在 n 維空間的一个球域內，这样，我們就得到 M 上的一个开集 U，把它依 y^{n+1} 軸方向投影到 $y^{n+1}=0$ 平面上，我們得到 U 和 n 維欧氏空間的区域的一个同胚. 对于 M 上的每一点 P，均可作这样的邻域，只不过有时必須以另外的 y^n 来代替剛才所用的 y^{n+1}. 依据欧氏空間的点集的性质，用有限个或可列无限个 U 就可以盖住 M. 設 U_1, U_2 为其中的两个，且有公共点，如果 U_1, U_2 均用沿同一 y^α 軸投影到 $y^\alpha=0$ 平面为其坐标的选取方法，那末变换的方程化为 $\bar{y}^i=y^i$，显然属于 C^r 且 $\det\left|\frac{\partial \bar{y}}{\partial y}\right|=1$. 如果 U_1, U_2 是沿不同的坐标軸的投影来定义坐标的，不妨設 U_1 是依 y^{n+1} 軸投影的，U_2 是依 y^n 軸投影的，U_1 的坐标記为 $y^1, \cdots, y^n$，U_2 的坐标記为 $\bar{y}^1, \bar{y}^2, \cdots, \bar{y}^{n-1}, \bar{y}^{n+1}$. 对于 U_1, U_2 的公共点，显然成立

$$\bar{y}^1=y^1, \quad \bar{y}^2=y^n, \cdots, \bar{y}^{n-1}=y^{n-1}, \quad \bar{y}^{n+1}=\varphi(y^1, \cdots, y^n).$$

这些函数显然为 C^r 的，且

$$\det\left|\frac{\partial \bar{y}}{\partial y}\right|=\frac{\partial \bar{y}^{n+1}}{\partial y^n}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y^n}}{\frac{\partial F}{\partial y^{n+1}}}.$$

由于在U_1中$\frac{\partial F}{\partial y^{n+1}}\neq 0$,所以这个式子有效,又在$U_2$中$\frac{\partial F}{\partial y^n}\neq 0$,所以 $\det\left|\frac{\partial \bar{y}}{\partial y}\right|\neq 0$, 因此 M 就是 n 維的微分流形. 特别, 容易驗証, $n+1$ 維空間的单位球面

$$(y^1)^2+\cdots+(y^{n+1})^2=1$$

可依剛才所說的方式給予 C^ω 解析結构成为 C^ω 流形.

同样地,如有方程

$$F_\sigma(y^1, \cdots, y^m)=0 \quad (\sigma=1, 2, \cdots, s),$$

定义了非空点集 M, F_σ 为 C^r 函数,且对 M 上的每一点,矩陣

$$\left(\frac{\partial F_\sigma}{\partial y^a}\right)$$

的秩数为 s, 那末也可以类似于剛才所說的方法定义出微分結构而成为 $m-s$ 維的 C^r 微分流形.

我們在第二章及后来各章中所討論的"空間"可以认为它是指某一微分流形在一点的某一适当的邻域而言, 但我們也可以有这样的观点:不必考虑这一小片"空間"是否属于某一个整体的流形,而把它当作一个独立的对象予以研究,而且在研究过程中只关心它在各点的适当的邻域的性质, 这便是局部的微分几何学所研究的对象. 这样的研究由于未計及整体的結构所生的影响而显得不够完整, 但局部的研究对于整体的結論也往往是必需的. 有时,局部的結果可以直接地推到整体去,但也有許多时候, 这种推广絕对不是平凡的, 而且导致了許多深入的研究. 在这个附录里不能一一指出本书的哪些結果可以容易地推广到整体中去, 哪些結果的推广还須作深入的討論. 我們只是以一部分基本的概念作为典型的例子来对此稍加說明.

我們先討論流形各点的相切空間. 在一微分流形上, 如果

限于討論一个坐标区域,那末在§5·2中就已經定义了各点的相切空間. 現在有一些点是由不同的坐标区域所复盖,但我們也已經指出在坐标变换下相切空間的自然标形的基的变换規則,所以由不同的坐标区域所复盖的点的相切空間仍然是唯一确定的,不同坐标区域所形成的区别只是自然标形选取有所不同. 在一微分流形上选好一組基本坐标区域后,流形上各点的切空間就有了自然标形,只是这些自然标形不是点点唯一的.

在每点的切空間上选取一个向量 λ,我們就得到在流形上的向量場. 設 x 为流形上的任一点,且 $x\in U_N$,在点 x 参考于由 U_N 所产生的自然标形,向量 λ 的分量記为 $\lambda^i(x)$ $(x\in U_N)$,如果 λ^i 为 U_N 的坐标的 C^s 函数,那末我們就称向量場 $\lambda(p)$ 为 C^s 的. 由于自然标形基之間的变换系数为 C^{r-1} 的函数,所以一般有 $s\leqslant r-1$. 和局部的情形相反,在流形上未必能整体地作出一个連續的向量場,使 λ 不取到零向量. 同样地,在流形上也未必能够給出一个标形場,使标形中的每一基向量均为 C^s 的 $(0\leqslant s\leqslant r-1)$.

由于每点都有相切空間,因此在流形的每点照样可以定义共变向量、張量等等所討論过的对象,也照样有共变向量場、張量場等等. 但我們要小心对待具有各种限制(从局部的观点看来,它們是极为輕微的)的向量場和張量場的存在性問題,流形的整体結构大大地縮減了它們的存在的現实性.

在流形上,向量場、張量場的制作相当于在每个基本坐标区域作向量場和張量場,在每两个基本坐标区域的交集上,它們要依照自然标形变换的規則滿足相应的条件. 例如,对一个向量場来說,設 U_N 和 U_L 有公共区域,它們的坐标分別为 x^i, $\bar{x}^i$, λ 的分量分別有表达式 $\lambda^i(x)$, $\bar{\lambda}^i(\bar{x})$,那末在公共区域上,必須成立恒等式

$$\bar{\lambda}^i(\bar{x}) = \lambda^j(x)\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j},$$

式中右边的 x 必須用坐标变换的式子 $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j)$ 代入.

在流形上也可以定义 Pfaff 式和外微分形式. Pfaff 式 $\omega(x, dx)$ 也可以认为先在各个基本坐标区域内分析地定义好:

$$\omega(x, dx) = a_i(x)dx^i,$$

而在不同的坐标区域的公共区域上,依前面所用的記号,成立

$$a_i(x)dx^i = \bar{a}_i(\bar{x})d\bar{x}^i.$$

或者,我們作一在流形上的共变向量場,它在各个基本坐标区域的分量为 $a_i(x)$,那末也就在全流形上定义了 Pfaff 式 $\omega(x, dx)$,而使在每一基本坐标区域內有 $\omega(x, dx) = a_i(x)dx^i$. 又如已作好了 p 阶的反称的共变張量場,在各个坐标区域有它的表达式 $a_{i_1\cdots i_p}$,那末也就在整个流形上定义出 p 次外形式 Ω. 如果 $a_{i_1\cdots i_p}$ 为可微分的函数,我們也容易証明,非但可以在各个基本坐标区域定义 $D\Omega$,而且 $D\Omega$ 本身在各个坐标区域的公共部分也具有剛才所說的相容性,因而为整个微分流形上的 $p+1$ 次的外形式. 所以在流形上,也可以进行外微分运算. 显然,Poincaré 定理: $D^2\Omega = 0$ 也成立,只要 Ω 的系数的所有二次导数为連續.

但是由于所用到的微分方程解的存在定理有局部性,第二章中所討論的关于完全可积 Pfaff 方程解的存在定理等有关的定理都不能推广到整个流形上去. 特别,Poincaré 定理的逆定理也未必成立. 当一个外形式 Ω 满足 $D\Omega = 0$ 时,就未必能有在整个流形上定义的外形式 Λ,使 $\Omega = D\Lambda$ 在整个流形上成立. 一个簡单的例子是在同心圓所圍成的环域 $1 < x^2 + y^2 < 2$ 中考察

$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy,$$

如令 θ 为向量 (x, y) 的幅角，这时可記 $\omega=d\theta$，在环域中 θ 不是单值函数．关于完全可积定理的探討可見 Chevalley C.[1]，而 Poincaré 的逆定理的討論引导出微分流形的同調性质的深入結果(DeRham[1])．

帶有正定的二阶对称張量場的微分流形称为 Riemann 流形．可以証明，任何具一定光滑性的微分流形上必可賦予 Riemann 度量而成为 Riemann 流形．这一事实的証明并非是平凡的，可以参閱 Lichnerowicz A.[1]．

C^r 微分流形 M_1 的 m 維 C^s 子流形是指由 M_1 的子集 M_2 所构成的 C^s 微分流形 $(0\leqslant s\leqslant r,\ 1\leqslant m\leqslant n)$．$M_2$ 的每点必存在一个 M_1 的坐标邻域 U_1 和 M_2 的坐标邻域 U_2，使得对 U_2 上的点，这两种坐标之間的关系可表为

$$x^i=f^i(u^1, \cdots, u^m),$$

式中 f^i 为 C^s 的函数，而且陣

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial u^\alpha}\right)$$

的秩数为 m．

現再对李群和齐性空間作若干补充說明．

李群的严格定义应为[1]：設 G 为一解析流形，G 同时是一个群，卽对其中的任两元素 x, y，可以定义乘法 $z=xy$，滿足抽象群定义中的所有要求；此外，我們还要求这两种結构是相容的，这就是，設 $x\in U_a$，$y\in U_b$，$z\in U_c$，利用各自的坐标来表达乘法关系 $z=xy^{-1}$ 时，我們得到函数关系

$$z^i=\psi^i(x^j, y^k),$$

式中的 ψ^i 为变量 x^j, y^k 的解析函数．

我們在第三章中所說的局部李群可理解为李群在恒等元素

[1] 有关李群的事項可見 Cohn P. M. [1] 和 Chevalley C. [1]．

e 的某一适当的邻域，也可以理解为独立的对象，即可不必考虑它是否属于某一个整体的李群；在第三章中我們就是从这样的观点来考虑問題的．局部李群也可以用公理方法来定义．根据下面所說的第三基本定理，第二种观点实际上和第一种观点是一致的，这就是，任一局部李群必然是某一李群 e 的一个适当邻域．自然，这样的李群未必是唯一的．

現在說明，局部李群中出現过的第一类不变 Pfaff 式和第二类不变 Pfaff 式都能在整个李群上定义．我們只对第一类不变 Pfaff 式作出論述．設 U_e 为已給的包含 e 的某一坐标区域，U_a 为另一坐标区域．設 $y\in U_a$，不妨設 y 的坐标为 $y^1, \cdots, y^n$；再記以 $y^1+dy^1, \cdots, y^n+dy^n$ 为坐标的元素为 $y+dy$，当 dy 充分小时，$y\cdot(y+dy)^{-1}\in U_e$，并且在 dy 的一阶无穷小范圍內，这一元素的坐标就是一組 Pfaff 式 $\omega^\alpha(y, dy)$．当 U_a 符合于 U_e 时，我們就得到第三章中的第一类不变 Pfaff 式．我們說每一 $\omega^\alpha(y,dy)$ 都是定义在整个群流形上的 Pfaff 式．事实上，設 $y\in U_a\cap U_b$，点 $y\cdot(y+dy)^{-1}$ 和坐标的选取无关，因此 $\omega^\alpha(y, dy)$ 和坐标的选取无关，所以它們是在群流形上处处有定义的 Pfaff 式．又設 $\bar{y}=ya$，式中 a 为固定的元素，这变换称为右推动；那末 $\bar{y}\cdot(\bar{y}+d\bar{y})^{-1}=ya\cdot a^{-1}(y+dy)^{-1}=y\cdot(y+dy)^{-1}$，这就是，成立

$$\omega^\alpha(\bar{y}, d\bar{y})=\omega^\alpha(y, dy).$$

因为 e 的邻域和任意点 a 的邻域可通过解析变换 $\bar{x}=xa$ 而有同胚关系，由于 $\omega^\alpha(x, dx)$ 在 e 的近旁为 r 个綫性独立的 Pfaff 式，所以 $\omega^\alpha(y, dy)$ 在任一点 y 的邻域均为 r 个独立的 Pfaff 式，这也說明在群流形上依

$$dP=\omega^\alpha(x, dx)e_\alpha$$

可以在每一元素的相切空間中确定一个标形．标形的每一基向量場都是在变换 $\bar{y}=ya$ 之下的不变向量．又任一不变向量場均

为 $C^\alpha e_\alpha$ 的形状，于此 $C^\alpha=\mathrm{const}$.

我們仍然有群的結构常数 $c^\alpha_{\beta\gamma}$ 和 Cartan-Maurer 方程

$$D\omega^\alpha=\frac{1}{2}c^\alpha_{\beta\gamma}[\omega^\beta,\omega^\gamma],$$

而 $c^\alpha_{\beta\gamma}$ 也满足 Jacobi 恒等式.

以上的叙述說明，第一，第二基本定理可以推广到整体李群去，第三基本定理也可以有它的推广. 这就是：設 $c^\alpha_{\beta\gamma}$ 为一組常数，关于下标反称，又满足 Jacobi 恒等式，那末必存在李群 G，它以 $c^\alpha_{\beta\gamma}$ 为結构常数. 这一定理的証明是比較复杂的，可見 Понтрягин Л. С. [1].

在流形上的向量場可表示为微分算子

$$Xf=\xi^i\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

的形状. 对任何数量函数，它的数值和坐标的选取无关，因此我們可以說 X 也是和坐标系統无关. 設在某一坐标区域中，$\omega^\alpha(x,dx)=\xi^\alpha_\beta(x)dx^\beta$，那末 e_α 的分量为 $\eta^\beta_\alpha(x)$，于此 (η^β_α) 为 (ξ^β_α) 的逆陣. 因此就有一系微分算子

$$X_\alpha=\eta^\beta_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\beta},$$

由 Cartan-Maurer 方程可知

$$\frac{\partial\xi^\alpha_\beta}{\partial x^\gamma}-\frac{\partial\xi^\alpha_\gamma}{\partial x^\beta}=c^\alpha_{\delta\varepsilon}\xi^\delta_\beta\xi^\varepsilon_\gamma.$$

把此式两端乘上 $\eta^\lambda_\alpha\eta^\beta_\mu\eta^\gamma_\nu$，关于 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 縮短，我們得

$$\eta^\gamma_\mu\frac{\partial\eta^\lambda_\nu}{\partial x^\gamma}-\eta^\gamma_\nu\frac{\partial\eta^\lambda_\mu}{\partial x^\gamma}=c^\alpha_{\mu\nu}\eta^\lambda_\alpha,$$

这表示

$$[X_\mu,\ X_\nu]=c^\alpha_{\mu\nu}X_\alpha.$$

从此可見，右推动的不变向量場构成一个李代数，其結构常数和李群的結构常数相同. 因不变向量場由过 e 的任一向量唯

一确定，因此李代数也可視为 e 的切向量的集合.

由于法坐标的概念是局部性的，所以在 e 的邻域仍可引入法坐标.

这里应該注意的是：两个李群的李代数同构，未必能得出它們是同构的結論，我們只能說这两个李群是局部同构的.（对局部李群，我們只有局部同构的概念，在正文中我們也用了同构这一术語.）

例如，对区間 $-\infty<x<\infty$，定义乘法关系 $z=x+y$，我們可得一李群，因这时該区間可以用一个坐标系統遮盖，因此就有了解析結构，而 $z=x-y$ 为 x, y 的解析函数. 又对单位圓 $r=1$ 引入坐标 θ，这时也可把 $0<\theta<\frac{3}{2}\pi$，$\pi<\theta<\frac{5}{2}\pi$ 作两个坐标系統来复盖，因而引入解析結构；或者我們也可以用 $-\infty<\theta<\infty$ 作坐标系統，但 $\theta_1\equiv\theta_2 \pmod{2\pi}$ 代表同一点，这样也引入同样的解析結构，我們定义乘法为 $\psi=\theta+\varphi$，也得到一个李群. 这两个李群为局部同构而不同构.

我們在第一章中引入的完全綫性群和各种典型群都是李群. 实完全綫性群的元素为 $(a^i_j)(\det|a^i_j|\neq0)$，其解析結构即由 n^2 个坐标 a^i_j 表示，这时群流形有两个連通分支，由 $\det|a^i_j|>0$ 和 $\det|a^i_j|<0$ 的点所构成. 其他的实典型群的解析結构是由它們的定义方程依 290～292 頁所述的方式导入的，可以直接驗証它們为李群.

李群的子群定义为关于乘法封閉的解析子流形. 子群和在元素 e 的一个适当的邻域的交集过 e 的連通部分即为我們第三章中所論的子群. 李群的子群要比从局部观点来討論的子群复杂得多，首先，子群自身要有拓扑的結构（例如，它可能是不連通的，特别它也可能是稀疏的子群，而从局部的观点来看，人們完全不理会稀疏的子群，因为它和单位元素所成的平凡子群局部

同构). 其次, 它在群 G 中也还有它的相对的結构(例如子群是否为閉的等等). 有了子群,我們可以照样地得到子代数. 相反地, 給了群的李代数的子代数后, 非但在局部意义下能有子群, 而且也存在整体的子群, 使其李代数就是已給的子代数. 这个定理的証明是相当复杂的.

利用李群 G 及子群 H 作齐性空間时, 需对子群 H 作必要的限制,除我們已經作过的 H 不应包含 G 的非平凡的子群这一点而外,还要假定 H 为 G 的閉子群. 直观地說,在一流形上作用着的連續变換群中,使一点不变的变換的"极限"也应使該点为不变. 可以严格地論証,当 G 是李群, H 是它的閉子群时,在空間 G/H 上可以引入解析結构, 使成为解析流形 (見 Chevalley[1]), 因此单有李代数 A 及其一个子代数(卽使不包括 A 的非平凡的理想子代数), 也未必能构成一个齐性空間. 但是, 第五章中关于迷向群, 可容許标形族等等討論均为有效. 又对已給的齐性 Riemann 空間而言,在各点的邻域,第六章所定的种种綫素形式仍然有效, 但 §6·5～6·7 所提到的反过来的事实, 卽由具一定性质的齐性 Riemann 空間及另一具一定性质的李群来构成另一齐性 Riemann 空間的方法, 还須設法加以增补, 因为我們在那里并未涉及整体的結构.

有时,綫素的局部形式就可以决定 Riemann 空間本身的整体性质. 例如, 在一定的条件下(比如說, 空間任何測地綫可以任意地予以延长, 但不排除閉合的情形), 空間綫素如局部地可分,那末空間本身也为两个流形的乘积流形(見 De Rham [1]). §6·5～6·7 中所列出的那些空間的拓扑結构大多也还沒有得到确定. 第七章中簡单地介紹的对称空間, 其整体性质已經有了較充分的研究(見 Helgason S. [1]).

另外一个值得注意的事实是,一 Riemann 流形的綫素如局

部地容許 r 参数的李群为运动群，它也未必为齐性空間 G_r/H. 例如对环面

$$-\infty<\theta_1<\infty, \quad -\infty<\theta_2<\infty,$$

而 $(\theta_1+2\pi, \theta_2+2\pi)$ 和 (θ_1, θ_2) 应视为同一点，可引入綫素

$$ds^2=d\theta_1^2+d\theta_2^2,$$

在每点的一个邻域来看，它都容許 3 参数的局部群为运动群，但是，它都不能作为形如 G_3/H 的齐性空間，因此，齐性 Riemann 空間的給法往往不是先給流形和綫素（我們很难判定这样給出的空間是否能作为齐性 Riemann 空間)，往往通过群 G 和閉子群 H 而給出 G/H. 此外，H 又是緊緻群，且不包含 G 的非平凡正常子群，由于緊緻群的实綫性表示必有不变的正定二次型（見 Chevalley[1]），所以在齐性空間 G/H 中必可引入不变的 Riemann 綫素，而成为齐性 Riemann 空間.

参考文献[1]

王宪钟 (Wang H. C.)

[1] On Finsler Spaces with Complete Integrable Equations of Killing, Journ. Lon. Math. Soc. **22** (1947), 5～9.

严志达

[1] 李群和对称空間,人民教育出版社, 1960.

[2] 半单純李群李代数表示理論,上海科学技术出版社, 1963.

谷超豪

[1] 微分几何物的高阶李导数和不变性群，复旦大学学报， 2 (1956), 29～31.

[2] 嘉当无限連續群的可約性(俄文), Известия ВУЗ, Математика, № 4 (5) (1958), 60～66.

[3] 論某些类型的齐性黎曼空間 (俄文), ДАН СССР, 122, № 2 (1958), 171～174.

[4] 論变換拟群的若干通性及其在微分几何中的应用 (俄文), 学位論文, 1959.

[5] 具不变向量場的齐性黎曼空間，复旦大学学报， 2 (1959), 12～25; 1 (1960), 19～37.

胡和生

[1] 論李-嘉当变換拟群的可約性及其在微分几何中的应用,上海科技論文选集,数学·化学, 1960.

[2] 論容有不可迁共形变換群的黎曼空間,复旦大学学报, 8 (1963), 227～230.

---

1) 这里只列举了一些直接引用的文献.

[3] 黎曼空間的相似变換群(未发表).

[4] 黎曼空間的运动群和迷向群(未发表).

[5] 黎曼空間运动群的空隙性(未发表).

Cartan E.

[1] La structure des groupes infini, 1937 (見 Oeuvres completes, Parties II, Vol. 2, 1335～1384).

[2] Les systémes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Paris, 1945.

[3] Геометрия групп Ли и симметрические пространства (若干論文的俄文譯文的汇編,附有注釋), 1949.

[4] La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle, 1951.

[5] Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, 2-édition, 1951.

Chevalley C.

[1] Theory of Lie Groups, Vol. I, Princetion, 1946.

Cohn P. M.

[1] Lie Groups, Cambridge, 1957 (中譯本:李群,黄正中,胡和生譯,上海科学技术出版社, 1963).

De Rham G.

[1] Sur la reductibilité d'un space de Riemann, Comment. Math. Helv. 26 (1952), 328～344.

[2] Varietes Différéntiables, Paris, 1955.

Дынкин Е. Б.

[1] Структура полупростых алгебр Ли (有中譯本), УМН 2 (1947), 59～127.

Егоров И. П.

[1] К усилению теоремы Фубини о порядке групп движений римановых пространств, ДАН СССР, 66 (1949), 793～796.

Eisenhart L. P.

[1] Riemannian Geometry, 2-edition, Princeton, 1949.

[2] Symmetric tensors of the second order whose first covariant derivatives are zero, Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), 259～280.

Фиников С. П.

[1] Метод внешних форм Картана (有中譯本), Москва, 1948.

Fubini G.

[1] Sugli spazii che ammetono un gruppo continuo di movimenti,

Annali di Mat. Ser. 3, 8 (1903), 39~81.

Helgason S.

[1] Differential Geometry and Symmetric Space, New York and London, 1962.

Hiramatu H.

[1] On some properties of group of homothetic transformations in Riemannian and Finslerian space, Tensor 4 (1954~1955), 28~39.

Klein F.

[1] Vergleichende Betrachtungen über neure geometrische Forschungen (Erlanger Program), Math. Ann. T. 43 (1893), 61~109.

Кручнович Г. И.

[1] О движениях в полуприводимых римановых пространствах, УМН 12, 6(78) (1957), 149~156.

Кручнович Г. И., 谷超豪

[1] Признак полуприводимости однородных римановых пространств, ДАН СССР, 120, № 6, 1183~1186.

Kurita M.

[1] On the isometry of a homogeneous Riemann space, Tensor 3 (1954), 91~100.

Лаптев Г. Ф.

[1] Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Моск. Матем. Общ. 2 (1953), 275~381.

Lichnerowicz A.

[1] Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, Rome, 1955.

[2] Geometrie des groupes de transformations, Paris, 1958.

Мантуров О. В.

[1] Об одноредных римановых несимметрических пространствах с неприводимой группой вращений, ДАН СССР, 141, №4 (1961).

[2] Римановы пространства с ортогональными и симплектическими группами движений и неприводимой группой вращений, ДАН СССР, 141, № 5 (1961), 1034~1037.

Nomizy K.

[1] Invariant affine connections on homogeneous spaces, Amer. Journ. of Math. 76 (1954), 33~65.

Obata M.

[1] Affine transformations in an almost complex manifold with a nature affine connection, Journ. of Math. Soc. of Japan, Vol. 8, No. 4 (1956), 345～362.

Obata M. and Ishihara S.

[1] On the group of conformal transformations of a Riemannian manifold, Proc. Japan Acad., 31 (1955), 426～429.

Понтрягин Л. С.

[1] Непрерывные группы, Москва, 1954.

Рашевский П. К.

[1] Геометрическая теория дифференциальных уравнений с частными производными, Москва–Ленинград, 1947.

[2] О геометрии однородных пространств, Труды сем. по вект. и тенз. анализу 9 (1952), 49～74.

Солодовников А. С.

[1] Проективные преобразования римановых пространств, УМН, 11, 4 (70) (1956), 45～116.

Teleman C.

[1] Les groupes transitifs de mouvements des espaces de Riemann V_5, Studii si Cercetari Matematice 4 (1953), 503～526.

[2] Sur les groupes de mouvement maximums des espaces Riemanniens V_n, Revue de Math. pures et appl. 6 (1960).

Вагнер В. В.

[1] Теория дифференциальных обектов и основания дифференциальной геометрии (O. Veblen 和 J. H. C. Whitehead 的书 Fundation of differential geometry 俄譯本的附注).

Vranceanu G.

[1] Sur les groupes de mouvements d'un espace de Riemann a quatre dimensions, Studii si Cercetari Matematice 4 (1953), 121～153.

Wakakuwa H.

[1] On n-dimensional Riemannian spaces admitting some groupes of motions of order less than $n(n-1)/2$, Tohôku Math. J. (2) 6 (1954), 121～134.

Yano K.

[1] The theory of Lie derivatives and its applications, 1956.

[2] On n-dimensional Riemannian spaces admitting a group of

motions of order $\frac{n(n-1)}{2}+1$, Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953), 260～279.

[3] On groups of homothetic transformations in Riemannian spaces, Journ. of Indian Math. Soc. New series 15～17 (1951～1953), 105～117.

Yano K. and Knebelman M. S.

[1] On homothetic mappings of Riemann spaces, Proc. of Amer. Math. Soc. 12 (1961), 300～303.

索 引

十 三 画

十 四 画

十 五 画